

14

Institut für Plasmaphysik
KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
des Landes Nordrhein-Westfalen

ZUR STABILITÄT DES PLASMAS
IM STATISCHEN GLEICHGEWICHT

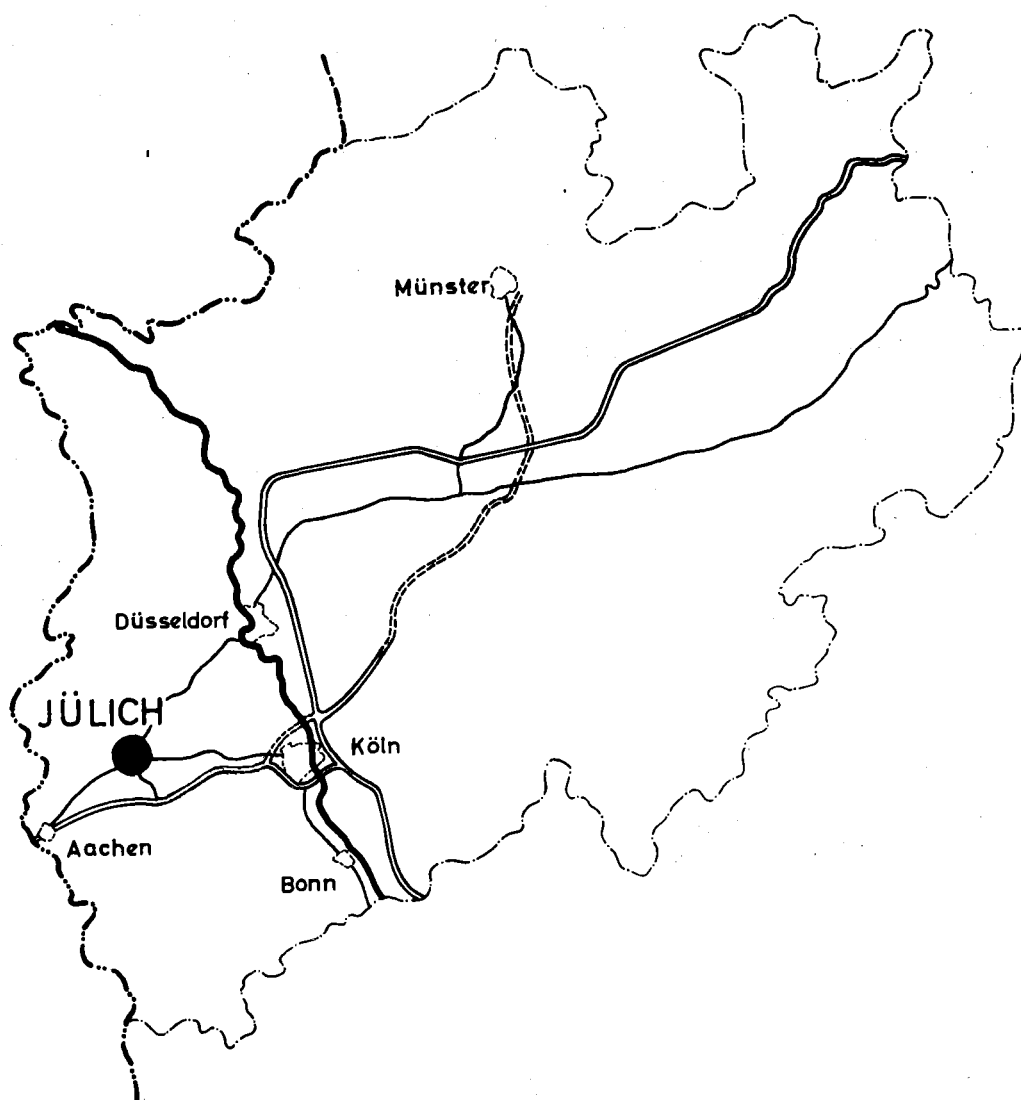
von

K. Schindler

Jül - 11 - PP

Januar 1961

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 11

Institut für Plasmaphysik Jül – 11 – PP

Dok.: PLASMA-STABILITY * DK 621.039.6.01

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Institut für Plasmaphysik
KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
des Landes Nordrhein-Westfalen

Zur Stabilität des Plasmas im statischen Gleichgewicht

von
K. Schindler

Jül - 11 - PP

Januar 1961

als Manuskript gedruckt

INHALTSVERZEICHNIS

Zusammenfassung

I. Einleitung

II. Das magnetohydrodynamische Stabilitätsproblem als Eigenwertproblem

1. Formulierung des Eigenwertproblems

2. Der Plasmazylinder

III. Das Störungsverfahren

1. Vorbemerkungen

2. Die erste Näherung

3. Höhere Näherungen

4. Allgemeine Abweichungen

IV. Anwendungen

1. Plasmazylinder mit zusätzlichen Oberflächenströmen

2. Plasmazylinder mit Temperaturgradient

3. Systeme mit kleinen Abweichungen von der Zylindersymmetrie

4. Plasmazylinder mit überlagertem Volumenstrom

Anhang

Symboltabelle

Literaturverzeichnis

ZUSAMMENFASSUNG

Es wird ein Näherungsverfahren entwickelt, mit dem ruhende stationäre magnetohydrodynamische Systeme auf Stabilität untersucht werden können. Es handelt sich um ein Störungsverfahren, das die Kenntnis der Lösung für ein benachbartes System voraussetzt.

Die Methode beruht auf der Möglichkeit, das magnetohydrodynamische Stabilitätsproblem als Eigenwertproblem zu einem selbstadjungierten Operator darzustellen. Dadurch wird es möglich, analog zur quantenmechanischen Störungsrechnung zu verfahren.

Das Verfahren gestattet, die Frequenzquadrate der Normalbewegungen als Eigenwerte für das abweichende (gestörte) System zu berechnen. Damit wird neben der Stabilitätsfrage, auf die die bisher benutzten Verfahren in erster Linie abzielen, im Falle der Instabilität auch die Frage nach der Größe der Anwachszeiten beantwortet, die vor allem für Systeme im Pulsbetrieb von Bedeutung ist.

Mit Hilfe des Verfahrens werden die Stabilitätseigenschaften einiger Systeme in der Nachbarschaft des isothermen Plasmazyinders mit Oberflächenströmen untersucht. Zur Erläuterung der Methode wird zunächst ein System betrachtet, für welches die exakte Lösung des Stabilitätsproblems vorliegt. Es wird verifiziert, daß die Lösungen im Rahmen der betrachteten Näherung übereinstimmen.

Der Einfluß kleiner Temperaturgradienten im Plasmazyylinder auf die Zeitkonstanten wird in erster Näherung diskutiert. Für jede Störung einzeln läßt sich das Problem durch Einführung eines geeigneten Temperaturmittelwertes auf den isothermen Fall zurückführen.

Eine allgemeine Untersuchung der Systeme, die durch Deformation der Grenzflächen aus dem Plasmazyylinder hervorgehen, ergibt, daß die Abweichungen der Eigenwerte von zweiter Ordnung in der Deformationsamplitude sind. Daraus läßt sich für den deformierten Θ -Pinch die

Größenordnung der Anwachszeiten abschätzen. Für den Torus ergeben sich die Eigenwertabweichungen ebenfalls als von zweiter Ordnung; anstelle der Deformationsamplitude tritt hier das Radienverhältnis.

Für eine Θ -Pinch Konfiguration mit kleinem axialem Volumenstrom werden die Eigenwerte ebenfalls in erster Näherung berechnet. Die axiale Stromverteilung ist zunächst beliebig; für den Fall konstanter Stromdichte wird das Ergebnis eingehend diskutiert. Es ergibt sich ein Stabilitätskriterium, welches für Volumenströme unterhalb eines kritischen Wertes Stabilität voraussagt. Dabei werden die stabilisierenden Einflüsse von endlicher Länge des Zylinders und endlichen Larmorradien der Teilchen durch Ausschaltung bestimmter Störungen berücksichtigt.

I. EINLEITUNG

In fast allen Experimenten, die im Zusammenhang mit dem Problem der Energiegewinnung durch kontrollierte Kernfusion diskutiert werden, benötigt man ein von Magnetfeldern eingeschlossenes, heißes, hoch ionisiertes Plasma. Von entscheidender Bedeutung ist dabei die Frage, ob es gelingt, das Plasma oberhalb der Zündtemperatur genügend lange zusammenzuhalten, oder ob Instabilitäten auftreten, die die gewünschte Gleichgewichtskonfiguration zerstören, bevor eine für eine positive Energiebilanz ausreichende Zahl von Kernreaktionen abgelaufen ist.

Zur Lösung dieses Problems werden seit mehreren Jahren in wachsendem Maße theoretische und experimentelle Untersuchungen durchgeführt; im Literaturverzeichnis sind einige dieser Arbeiten zusammengestellt.

In einem großen Teil dieser Arbeiten wird für theoretische Stabilitätsbetrachtungen das magnetohydrodynamische Modell zugrunde gelegt.

Stark einschränkende Voraussetzungen für die Gültigkeit dieses Modells lassen die Ergebnisse zunächst als nicht sehr relevant erscheinen.

Neuere Untersuchungen des Stabilitätsverhaltens von Plasmen, die direkt von der stoßfreien Boltzmann-Gleichung ausgehen, zeigen jedoch, daß die Magnetohydrodynamik gültige hinreichende Stabilitätskriterien liefert^{1,2}. Rosenbluth und Rostoker¹ erhalten für zylindersymmetrische Systeme mit skalarem Gleichgewichtsdruck vollständige Übereinstimmung zwischen den kinetischen und den magnetohydrodynamischen Stabilitätsaussagen.

Zur magnetohydrodynamischen Stabilitätsuntersuchung wurden bisher im wesentlichen zwei Methoden verwandt: Die Methode der Normalbewegungen (normal modes)*, die u.a. von Kruskal und Schwarzschild³, Rosenbluth⁴, Taylor⁵, und Shafranov⁶ zur Untersuchung der Pinch-Konfiguration herangezogen wurden, und das Energie - Prinzip

*Der Ausdruck Normalschwingung wird hier vermieden, da wie im folgenden ausgeführt wird, neben periodischen auch monotone Bewegungsformen auftreten.

(Bernstein, Frieman, Kulsrud, Kruskal⁷ und Hain, Lüst, Schlüter⁸, Rosenbluth⁹ u.a.) . Die Zeitabhängigkeit der Normalbewegungen ergibt sich hier entweder als rein periodisch (Stabilität) oder rein exponentiell (Instabilität) . Das Energie-Prinzip sagt aus, daß eine Gleichgewichtskonfiguration stabil ist, wenn eine quadratische Form positives Vorzeichen besitzt. Die Form ist im wesentlichen die zweite Variation der potentiellen Energie des Plasmas bei virtueller Verschiebung der Volumenelemente.

Beide Methoden werden fast ausschließlich zur Beantwortung der Frage benutzt, ob eine Gleichgewichtskonfiguration stabil oder instabil ist. Für diese Fragestellung kann die Normalbewegungsmethode stark vereinfacht werden^{1,5}; insbesondere ist es häufig möglich, das Plasma als inkompressible Flüssigkeit zu beschreiben. In der Formulierung des Energie-Prinzips durch Bernstein u.a.⁷ ist diese Fragestellung ebenfalls ausschließlich vorgesehen.

In praktischen Fällen interessiert jedoch häufig nicht nur die Frage "stabil oder instabil?" sondern im Fall der Instabilität ist ebenfalls die Beantwortung der Frage "wie instabil?" von Interesse. Eine instabile Konfiguration, die im Pulsbetrieb erzeugt werden soll, wird praktisch als stabil gelten können, wenn die Anwachszeiten der Instabilitäten wesentlich größer als die Pulsdauer sind. Daher ist neben der Kenntnis der Stabilitätskriterien auch die Kenntnis der Anwachszeiten (Zeitkonstanten) der Instabilitäten erforderlich.

Zur Bestimmung der Anwachszeiten ist das Energie-Prinzip (in der Formulierung durch Bernstein u.a.⁷) nicht geeignet, denn hier wird das System durch ein vereinfachtes ersetzt, das lediglich das gleiche Vorzeichen der Energievariation liefert. Bei Verwendung der Normalbewegungsmethode muß auf die erwähnten Vereinfachungen (z.B. Inkompressibilität) verzichtet werden. Daher ist die geschlossene Berechnung der Anwachszeiten nur für wenige Konfigurationen möglich.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung von Zeitkonstanten für magnetohydrodynamische Systeme, die kleine Abweichungen von solchen Systemen (Grundsystemen) aufweisen, für die die Eigenbewegungen bekannt sind. Die Abweichung vom Grundsystem soll durch einen Parameter α beschrieben werden können, $\alpha = 0$ beschreibt das Grundsystem. Die Normalbewegungen und ihre Zeitkonstanten sollen aus den Normalbewegungen und Zeitkonstanten des Grundsystems mit α stetig hervorgehen.

Bernstein, Frieman, Kruskal und Kulsrud⁷ haben gezeigt, daß das magnetohydrodynamische Stabilitätsproblem als Eigenwertproblem zu einem selbstadjungierten Differentialoperator F geschrieben werden kann:

$$F(\xi) - \lambda \xi = 0 \quad (1)$$

$F(\xi)$ ist die auf das Plasmavolumen wirkende Kraft, wenn es die vektorielle Verschiebung ξ erfährt; λ ist das Quadrat der reziproken Zeitkonstanten. (1) stellt die Bewegungsgleichung des Plasmavolumenelementes dar. Wegen der Selbstadjungiertheit des Kraftoperators F besteht eine gewisse Analogie zu den quantenmechanischen Eigenwertproblemen, etwa zur Bestimmung der Energieniveaus eines Atoms aus der Schrödingergleichung. Es liegt daher nahe, die Übertragbarkeit der für die Quantenmechanik entwickelten Störungsverfahren auf die Magnetohydrodynamik zu untersuchen. Die Problemstellung der quantenmechanischen Störungsrechnung ist gerade die oben geforderte: Berechnung der Eigenwertstörung für gestörte Grundsysteme, wobei die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Grundsysteme bekannt sind. In folgenden Punkten bestehen jedoch Abweichungen des magnetohydrodynamischen Problems von den üblichen quantenmechanischen Störungsproblemen:

1. Vektorielle Eigenfunktionen
2. Randbedingungen im Endlichen
3. Auftreten von mehreren Gebieten, für die verschiedene Gleichungen gelten (z.B. Plasma-Vakuum) .

Mit dem üblichen Entwicklungsverfahren (Entwicklung aller relevanten Größen nach Potenzen des Störparameters α) gelingt es, die erste Näherung für die Eigenwerte zu berechnen. Die Rechnung wird durchgeführt für zwei Typen von Randbedingungen:

- (A) Das Plasma ist von einer leitenden starren Wand umgeben,
- (B) das Plasma ist von einem Vakuumbereich umgeben, der von einer leitenden Hülle begrenzt wird.

Zur weiteren Diskussion empfiehlt sich der Übergang von der Differentialgleichung (1) zu einem System von Integralgleichungen. Dieser Übergang wird mit Hilfe des Green'schen Operators des Problems durchgeführt. Es ergibt sich, daß im Falle homogener Randbedingungen (z.B. reine Feldabweichung bei Randbedingungstyp (A)) durch systematische Iteration höhere Näherungen gewonnen werden können.

Bei entarteten Grundsystemen kann auf die übliche Weise (Diagonalisierung der "Störmatrix") verfahren werden.

Systeme, deren Abweichungen vom Grundsystem auch geometrische Abweichungen der Begrenzungen enthalten, werden auf Systeme ohne Abweichungen der Grenzflächen zurückgeführt.

Im IV. Kapitel wird das Verfahren zunächst an einem System geprüft für das die exakte Lösung vorliegt. Dieses System besteht in einem Plasmazyylinder, dem zusätzliche Oberflächenströme überlagert werden. Die berechneten Eigenwerte werden mit den aus der exakten Dispersionsbeziehung sich ergebenden Werten verglichen; es ergibt sich Übereinstimmung im Rahmen der betrachteten Näherung.

Das Verfahren wird dann zur Diskussion der Stabilität des Plasmazyinders herangezogen, in dem ein radialer Temperaturgradient besteht. (In allen früheren Rechnungen wurde, meist stillschweigend, konstante Temperatur angenommen.) In erster Näherung kann das System auf den Fall konstanter Temperatur zurückgeführt werden, indem, für jede

Störung getrennt, ein geeigneter Temperaturmittelwert eingesetzt wird. Auf die Stabilitätsfrage hat der Temperaturgradient keinen Einfluß.

Eine allgemeine Diskussion von Systemen in der Nachbarschaft des Zylinders, bei denen die Störung in kleinen Abweichungen von der Zylindersymmetrie besteht, führt zu dem Ergebnis, daß Abweichungen der Eigenwerte erst in zweiter Ordnung auftreten. Im Torus sind die Eigenwerte bis auf Glieder der Ordnung $(r_0/a)^2$ (r_0 ist kleiner, a großer Radius) gleich den entsprechenden Eigenwerten des Zylinders.

Im Zusammenhang mit Fragen der Stationarität eines Plasmaringes interessiert das Problem der Stabilität eines Plasmazylinders mit azimuthalen Oberflächenströmen und einem kleinen longitudinalen Volumenstrom. Für dieses System werden die Eigenwerte berechnet. Es zeigt sich erwartungsgemäß (Suydam¹⁰, Rosenbluth¹¹), daß der Fall entgegengesetzter innerer und äußerer Felder die Stabilität begünstigt. Unter Berücksichtigung der endlichen Länge des Systems und einer Abschätzung des höchsten vorkommenden azimuthalen Index m (nach Post u. a.²⁴) wird die Existenz von magnetohydrodynamisch stabilen Parameterbereichen des Systems gezeigt.

Als Grundlösungen werden für alle betrachteten Systeme die Lagrange-Verschiebungen ξ_i , die Vektorpotentiale für den Vakuumbereich \mathcal{Q}_i und die Eigenwerte λ_i des Plasmazylinders mit Oberflächenströmen benötigt. Die ξ_i und \mathcal{Q}_i werden im zweiten Kapitel bereitgestellt; die λ_i werden der von mehreren Autoren^{4, 5, 6} angegebenen Dispersionsformel des Plasmazylinders entnommen.

II. DAS MAGNETOHYDRODYNAMISCHE STABILITÄTSPROBLEM ALS EIGENWERTPROBLEM

1. Formulierung des Eigenwertproblems.

In diesem Abschnitt werden einige Relationen und Ergebnisse aus der magnetohydrodynamischen Stabilitätstheorie zusammengestellt, die für die Formulierung des Näherungsverfahrens benötigt werden. Es handelt sich im wesentlichen um Ergebnisse einer Arbeit von Bernstein, Frieman, Kruskal und Kulsrud⁷ über das Energieprinzip; diese Arbeit wird im folgenden als BFKK zitiert.

Allen Stabilitätsbetrachtungen wird hier als Modell das magnetohydrodynamische System zugrunde gelegt. Unter magnetohydrodynamischem System soll ein System verstanden werden, das folgendem Satz von Gleichungen genügt

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \frac{p}{\rho} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

Die Voraussetzungen für die Gültigkeit dieses Systems werden in BFKK eingehend diskutiert. Die Forderung nach Isotropie des Drucks und die stark vereinfachte Form des Ohmschen Gesetzes (3) erscheinen zunächst als sehr einschränkend. Rosenbluth und Rostoker¹ einerseits und Kruskal und Obermann² andererseits konnten jedoch durch Ver-

gleich mit Ergebnissen, die durch Lösung der linearisierten Boltzmann-gleichung gewonnen wurden, nachweisen, daß die Magnetohydrodynamik jedenfalls hinreichende Stabilitätskriterien liefert. Im Fall der Zylindersymmetrie und Isotropie des Gleichgewichtsdrucks ergibt sich völlige Übereinstimmung.

Für ein ruhendes stationäres System reduzieren sich die magnetohydrodynamischen Grundgleichungen (2 - 8) auf die Form

$$\nabla p_0 = \vec{j}_0 \times \vec{B}_0 \quad (9)$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0 \quad (10)$$

Lösungen dieses Systems werden im folgenden als stationäre Lösungen bezeichnet und zunächst mit dem unteren Index 0 versehen.

Es ist zweckmäßig, das Magnetfeld in einen stationären Anteil (\vec{B}_0) und einen instationären Anteil ($\vec{B} - \vec{B}_0$) aufzuspalten und die Randbedingungen für beide Anteile verschieden zu formulieren. Dies geschieht deshalb, weil ein stationäres Magnetfeld in einem Leiter vorhanden sein kann, während genügend schnell veränderliche Felder abgeschirmt werden.

Es werden zwei Sätze von Randbedingungen betrachtet.

(A) Das Plasma ist umgeben von einer starren Wand:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (11)$$

(\vec{n} ist die aus dem Plasma herausweisende Normale der Grenzfläche). Die magnetische Feldstärke soll im Gleichgewichtszustand parallel zur Wand verlaufen:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (12)$$

Die Leitfähigkeit der Wand sei so groß, daß während der betrachteten instationären Vorgänge im Plasma dauernd

$$\mu \cdot \vec{B} = 0 \quad (13)$$

erfüllt bleibt. Weniger exakt formuliert, bedeutet diese Forderung, daß die Diffusionszeit des instationären Magnetfeldes $\vec{B} - \vec{B}_0$ für Diffusion durch die Wand groß gegen die charakteristischen Zeiten der instationären Vorgänge sein soll. Die Randbedingung für die elektrische Feldstärke ergibt sich als Folge.

(B) Das Plasma ist umgeben von einem Vakuumbereich, den eine metallische Hülle von so großer Leitfähigkeit umgibt, daß das instationäre Magnetfeld parallel zur Wand verläuft (d.h. nicht eindringt). An der Grenzfläche Plasma Vakuum gilt dann

$$\left[\left[p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right] \right] = 0 \quad (14)$$

$$\mu \cdot \left[\left[\vec{B} \right] \right] = 0 \quad (15)$$

$$\mu \times \left[\left[\vec{\mathcal{E}} \right] \right] = \mu \cdot 10 \left[\left[\vec{B} \right] \right] \quad (16)$$

$$\mu \times \left[\left[\vec{B} \right] \right] = \mu_0 \vec{\alpha} \quad (17)$$

$\left[\left[q \right] \right]$ bedeutet den Sprung der Größe q an der Oberfläche in Richtung der Normalen:

$$\left[\left[q \right] \right] = q_{\text{außen}} - q_{\text{innen}} \quad (18)$$

An der metallischen Hülle muß

$$\mu \times \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (19)$$

$$\mu \cdot (\vec{B} - \vec{B}_0) = 0 \quad (20)$$

erfüllt sein.

Für das folgende ist die Einführung der Lagrange-Verschiebung ξ des Plasmavolumenelementes zweckmäßig. Wie in BFKK wird dabei für

den Ort des Plasmavolumenelementes $\mathcal{U}(t)$ der Ansatz gemacht

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}_0 + \xi(\mathcal{U}_0, t) \quad (21)$$

$$\xi(\mathcal{U}_0, 0) = 0$$

Führt man diesen Ansatz in das System der Grundgleichungen (2 - 8) ein, so erhält man ein System von Differentialgleichungen mit den unabhängigen Variablen \mathcal{U}_0 und t . Nach Linearisierung in ξ lassen sich die Größen $\mathcal{L}, \dot{\mathcal{J}}, p$ und \mathcal{S} durch ξ und räumliche Ableitungen von ξ ausdrücken:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{Q}_\perp + \xi \cdot \nabla \mathcal{L}_0, \quad \mathcal{Q}_\perp = \nabla \times (\xi \times \mathcal{L}_0) \quad (22)$$

$$\dot{\mathcal{J}} = \dot{\mathcal{J}}_0 + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathcal{Q}_\perp + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\xi \cdot \nabla \mathcal{L}_0) - \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \xi) \cdot \nabla] \times \mathcal{L}_0 \quad (23)$$

$$p = p_0 - r p_0 \nabla \cdot \xi \quad (24)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}_0 \nabla \cdot \xi \quad (25)$$

$\mathcal{L}_0, \dot{\mathcal{J}}_0, p_0, \mathcal{S}_0$ sind reine Ortsfunktionen und beschreiben einen stationären Zustand; ∇ bezieht sich auf die Ortskoordinate \mathcal{U}_0 . Mit diesen Größen lautet die Bewegungsgleichung (2), ebenfalls linearisiert:

$$p_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(\xi) \quad (26)$$

$$F(\xi) = \nabla (r p_0 \nabla \cdot \xi + \xi \cdot \nabla p_0) + \dot{\mathcal{J}}_0 \times \mathcal{Q}_\perp - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}_0 \times (\nabla \times \mathcal{Q}_\perp) \quad (27)$$

(26) ist eine lineare Differentialgleichung für ξ mit zeitlich konstanten Koeffizienten; sie wird daher durch den Ansatz

$$\xi(\mathcal{U}_0, t) = \xi(\mathcal{U}_0) e^{i\omega t} \quad (28)$$

gelöst. Mit $\omega^2 = \lambda$ ergibt sich die Eigenwertgleichung

$$F(\xi) - \lambda \rho \xi = 0, \quad (29)$$

wo ξ jetzt für $\xi(\varphi_0)$ steht.

Für die Randbedingungen (A) und (B) ergibt sich durch Einführung von ξ :

(A) Grenzfläche Plasma-Metall:

$$n \cdot \xi = 0 \quad (30)$$

(B) Grenzfläche Plasma - Vakuum:

$$\begin{aligned} -\gamma p_0 \nabla \cdot \xi + \frac{1}{\mu_0} B_0 \cdot (\alpha_l + \xi \cdot \nabla B_0) \\ = \frac{1}{\mu_0} \hat{B} (\nabla \times \alpha_l + \xi \cdot \nabla \hat{B}) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\hat{n} \times \alpha_l = - \hat{n} \cdot \xi \hat{B} \quad (32)$$

Grenzfläche Vakuum - Metall:

$$\hat{n} \times \alpha_l = 0 \quad (33)$$

$\hat{}$ kennzeichnet stationäre Vakuum-Größen.

α_l ist hier der instationäre Teil des Vektorpotentials im Vakuum

$$\hat{B} - B_0 = \nabla \times \alpha_l, \quad (34)$$

genügt also der Differentialgleichung

$$\nabla \times \nabla \times \alpha_l = 0 \quad (35)$$

Da die Differentialgleichung (35) nur bei den Randbedingungen (B) auftritt, wird sie, falls nicht ausdrücklich ausgenommen, im folgenden formal mit zu den Randbedingungen gerechnet.

Gleichung (29) stellt zusammen mit Randbedingungen (A) oder (B) ein Eigenwertproblem zur Bestimmung der Eigenwerte λ_i und der Eigenvektoren ξ_i dar.

Wie in BFKK gezeigt wird, ist $F(\xi)$ selbstadjungiert, d.h. es gilt die Beziehung

$$\oint_p [\xi^* F(\eta) - \eta \cdot F^*(\xi)] d\tau = 0 \quad (36)$$

für Vektorfelder ξ und η , die den gleichen Randbedingungen genügen (hier (A) oder (B)). Für beliebige ξ und η folgt

$$\begin{aligned} & \oint_p [\xi^* F(\eta) - \eta \cdot F^*(\xi)] d\tau \\ &= \int_\sigma u d\sigma \cdot \left\{ \xi^* \left[r p_0 \nabla \cdot \eta - \frac{1}{\mu_0} B_0 \cdot \nabla \times (\eta \times B_0) + \eta \cdot \dot{j}_0 \times B_0 \right] \right. \\ & \quad \left. - \eta \left[r p_0 \nabla \cdot \xi - \frac{1}{\mu_0} B_0 \cdot \nabla \times (\xi \times B_0) + \xi \cdot \dot{j}_0 \times B_0 \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

Wenn ξ und η beide den Randbedingungen (A) bzw. (B) genügen, verschwindet das Oberflächenintegral, und es ergibt sich (36).

Aus (29) folgt mit (36) für die Eigenwerte und Eigenvektoren

- a) λ_i reell
- b) Orthogonalität (Normierbarkeit vorausgesetzt):

$$\oint_p B_0 \xi_i^* \cdot \xi_k d\tau = \delta_{ik}^\dagger \quad (38)$$

Die Vollständigkeit des Systems der ξ_i wird man aus physikalischen Gründen folgern können (vgl. BFKK).

Damit ist das Stabilitätsproblem auf die Lösung des Eigenwertproblems (29) reduziert. Ein System ist instabil, wenn es positive Eigenwerte gibt; das System ist stabil, wenn keine positiven Eigenwerte existieren. Die Zeitkonstanten ergeben sich als $\tau_i = |\lambda_i^{-\frac{1}{2}}|$

Im folgenden Abschnitt wird die Lösung des Randwertproblems (29) mit Randbedingungen des Typs (B) für den Plasmazyylinder mit Oberflächenströmen durchgeführt. Die ξ_i , Ω_i und λ_i werden für spätere Anwendungen des Näherungsverfahrens als Grundlösungen benötigt.

† Ein hier anzubringender dimensionsbehafteter Faktor wird wie in BFKK unterdrückt.

2. Der Plasmazylinder.

In diesem Abschnitt soll die Stabilität eines Plasmazylinders mit Oberflächenströmen untersucht werden. Im Innern des Zylinders herrscht der konstante Druck p und das konstante Magnetfeld (in Zylinderkoordinaten) :

$$\mathcal{L} = (0, 0, B_i) \quad (39)$$

Außerhalb des Plasmazylinders sei

$$\mathcal{L} = (0, B_\Theta, B_a) \quad (40)$$

B_i und B_a sind konstant, $B_\Theta = B_o \frac{r_o}{r}$, r_o ist der Radius des Zylinders, B_o der (konstante) Wert von B_Θ auf der Oberfläche. Bei $r = \wedge r_o$ befindet sich eine leitende metallische Hülle. Es liegen daher Randbedingungen vom Typ (B) vor. (14) liefert als Gleichgewichtsbedingung

$$p + \frac{B_i^2}{2\mu_o} = \frac{B_o^2}{2\mu_o} + \frac{B_a^2}{2\mu_o} \quad (41)$$

Diese Gleichgewichtskonfiguration wurde von Rosenbluth⁴, Tayler⁵, Shafranow⁶ und ein Sonderfall ($\wedge \rightarrow \infty$, $B_i = 0$) von Jordan und Schindler¹² unabhängig auf Stabilität untersucht. Die Rechnung wird hier in abgekürzter Form wiederholt, da die Lösungen für die weiteren Untersuchungen in der hier gewählten Schreibweise benötigt werden. Für Einzelheiten der Rechnung und Diskussion der Ergebnisse muß auf die erwähnten Arbeiten verwiesen werden.

Nach dem vorigen Abschnitt besteht das Problem in der Lösung des Randwertproblems (29) unter Berücksichtigung der Randbedingungen (B).

ξ besitze in Zylinderkoordinaten die Komponenten U, V, W . Da die Koeffizienten in (29) von Θ und z unabhängig sind, kann der Ansatz

$$U = \hat{U}(r) e^{im\Theta} e^{ikz} \quad (42)$$

gemacht werden, für V und W entsprechend. Wegen der Periodizität in Θ -Richtung ist m ganzzahlig; k ist reell und für den Fall des unbegrenz-

ten Zylinders kontinuierlich. Bei endlicher Länge und Randbedingungen, die periodische Fortsetzung erlauben (z.B. Identifizierung der Enden), wird k ebenfalls diskret. Dieser Fall soll im folgenden behandelt werden. Die Bewegungsgleichung (29) liefert dann die Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} \rho \lambda \hat{U} = & \rho \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{U}) + \frac{im}{r} \hat{V} + ik \hat{W} \right] \\ & - \frac{B_i^2}{\mu_0} \left[k^2 \hat{U} - \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{U}) \right) - im \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \hat{V} \right) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \rho \lambda \hat{V} = & \rho \left[\frac{im}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{U}) + \frac{im}{r} \hat{V} + ik \hat{W} \right) \right. \\ & \left. - \frac{B_i^2}{\mu_0} \left[-\frac{im}{r^2} \frac{d}{dr} (r \hat{U}) + \frac{m^2}{r^2} \hat{V} + k^2 \hat{V} \right] \right] \end{aligned} \quad (44)$$

$$\rho \lambda \hat{W} = ik \rho \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{U}) + \frac{im}{r} \hat{V} + ik \hat{W} \right] \quad (45)$$

Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen für \hat{U} , \hat{V} , \hat{W} besitzt als allgemeine im Nullpunkt stetige Lösungen

$$\hat{U} = C \frac{A\alpha}{ik} I_m'(\alpha r) \quad \hat{V} = C \frac{mA}{kr} I_m(\alpha r) \quad \hat{W} = C I_m(\alpha r) \quad (46)$$

C ist Integrationskonstante, die Normierungsbedingung liefert:

$$\rho \int_0^L (|\hat{U}|^2 + |\hat{V}|^2 + |\hat{W}|^2) d\tau = 1 \quad (47)$$

Daraus folgt (L ist die Länge des Zylinders)

$$\begin{aligned} |C|^2 = & \frac{k^2}{2\pi L \rho A^2 g} \\ g = & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{A^2 \alpha^2} \right) |\alpha r_0 I_m'(\alpha r_0)|^2 + \alpha r_0 I_m'(\alpha r_0) I_m^*(\alpha r_0) \\ & - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{A^2 \alpha^2} \right) (m^2 + \alpha^2 r_0^2) |I_m(\alpha r_0)|^2 \end{aligned} \quad (48)$$

I_m sind die modifizierten Besselfunktionen, A und a Abkürzungen:

$$\alpha = \left[\frac{(k^2 + \frac{\lambda}{v^2})(k^2 + \frac{\lambda}{c^2})}{k^2 + \frac{\lambda}{v^2} + \frac{\lambda}{c^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Hauptwert)} \quad (49)$$

$$A = \frac{k^2 + \frac{\lambda}{v^2} + \frac{\lambda}{c^2}}{k^2 + \frac{\lambda}{c^2}} \quad (50)$$

mit $v = \left[\frac{\gamma p}{\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Schallgeschwindigkeit)}$

$$c = \left[\frac{B_i^2}{\mu_0 \rho} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(Alfvéngeschwindigkeit)}$$

Damit wird ($x = ar$)

$$\xi = c e^{im\Theta + ikz} \left[\frac{A\alpha}{ik} I_m'(x), \frac{mA}{kr} I_m(x), I_m(x) \right] \quad (51)$$

Das Vektorpotential \mathcal{Q} genügt der Differentialgleichung

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{Q} = 0, \quad r_0 < r < \Lambda r_0 \quad (52)$$

ferner kann

$$\nabla \cdot \mathcal{Q} = 0 \quad (53)$$

gefordert werden.

(52) ergibt nach Integration:

$$\nabla \times \mathcal{Q} = \nabla \varphi \quad (54)$$

wo φ der Potentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ genügen muß.

Mit dem Ansatz $\varphi = \hat{\varphi}(r) e^{im\theta + ikz}$ ergibt sich als Lösung

$$\hat{\varphi}(r) = F I_m(|k|r) + G K_m(|k|r), \quad (55)$$

F und G sind Integrationskonstanten.

(54) zusammen mit der Bedingung (53) liefert die Komponenten von \vec{A} zu

$$\begin{aligned} A_r &= f \left[\frac{m}{kr} (F I_m + G K_m) - \frac{i|k|}{k} (D I_m' + E K_m') \right] \\ A_\theta &= f \left[\frac{m}{kr} (D I_m + E K_m) + \frac{i|k|}{k} (F I_m' + G K_m') \right] \end{aligned} \quad (56)$$

$$A_z = f [D I_m + E K_m]$$

$$f = e^{im\theta + ikz}, \quad I_m = I_m(|k|r), \quad K_m = K_m(|k|r)$$

Die Konstanten D, E, F, G lassen sich aus den Randbedingungen (31 - 33) durch die Konstante C ausdrücken ($x_0 = \alpha r_0$, $y_0 = |k| r_0$):

$$\begin{aligned} D &= - \frac{B_0(k^2 + \frac{\lambda}{v_2}) I_m'(x_0) K_m(\lambda y_0)}{ik\alpha [K_m(y_0) I_m(\lambda y_0) - I_m(y_0) K_m(\lambda y_0)]} C \\ E &= \frac{B_0(k^2 + \frac{\lambda}{v_2}) I_m'(x_0) I_m(\lambda y_0)}{ik\alpha [K_m(y_0) I_m(\lambda y_0) - I_m(y_0) K_m(\lambda y_0)]} C \end{aligned} \quad (57)$$

$$F = - \frac{(m B_0 + k r_0 B_a) (k^2 + \frac{\lambda}{v_2}) I_m'(x_0) K_m'(\lambda y_0)}{\alpha k |k| r_0 [K_m'(y_0) I_m'(\lambda y_0) - I_m'(y_0) K_m'(\lambda y_0)]} C$$

$$G = \frac{(m B_0 + k r_0 B_a) (k^2 + \frac{\lambda}{v_2}) I_m'(x_0) I_m'(\lambda y_0)}{\alpha k |k| r_0 [K_m'(y_0) I_m'(\lambda y_0) - I_m'(y_0) K_m'(\lambda y_0)]} C$$

(57)

Aus der Bedingung, daß die Determinante des aus den Randbedingungen folgenden homogenen linearen Gleichungssystems für C, D, E, F und G verschwinden soll, ergibt sich die Dispersionsbeziehung:

$$\alpha k r_0^2 \left[\frac{B_i^2}{B_0^2} + \frac{\lambda \mu_0}{B_0^2 (k^2 + \frac{\lambda}{v_2})} \right] \frac{I_m(x_0)}{I_m'(x_0)}$$

$$= k r_0 + (m + \frac{B_a}{B_0} k r_0)^2 \frac{y_0 [K_m(y_0) I_m'(\lambda y_0) - I_m(y_0) K_m'(\lambda y_0)]}{k r_0 [K_m'(y_0) I_m'(\lambda y_0) - I_m'(y_0) K_m'(\lambda y_0)]}$$

(58)

Diese Beziehung wurde von den oben genannten Autoren^{4, 5, 6} auf verschiedenen Wegen gewonnen. Aus ihr folgt das Stabilitätsverhalten der linearen Pinchkonfigurationen. Es ergibt sich, daß für bestimmte Bereiche der Parameter B_i/B_0 , B_a/B_0 , \wedge die λ -Werte zu allen (zulässigen) m- und k-Werten negativ sind; d.h. die Konfiguration ist für diese Parameterbereiche stabil. Als notwendige Bedingungen für Stabilität ergibt sich:

$$\wedge < 5, \quad \left(\frac{B_i}{B_0} \right)^2 > \frac{1}{2}$$

(59)

Die stromführende Grenzschicht des Zylinders wurde in dieser Rechnung als unendlich dünn angenommen. Bei Berücksichtigung einer endlichen Übergangsschicht ergibt sich nach Rosenbluth¹¹ eine zusätzliche Oberflächeninstabilität, die von der Orientierung des inneren und äußeren

Feldes abhängt (entgegengesetzte Felder stabilisieren) . Auf diese Effekte soll jedoch hier nicht weiter eingegangen werden; zumal es fraglich erscheint, ob das benutzte Modell auf die Grenzschicht anwendbar ist. Ein Fall, in dem ebenfalls die Orientierung der Magnetfelder eine Rolle spielt, wird im letzten Kapitel behandelt.

Die Vektoren $\xi(r, \Theta, z)$, die in (51) berechnet wurden, sind Eigenvektoren des Operators F . Sie sind dreifach zu indizieren: $\xi_{m,k,s}$. Die Indizes m und k beschreiben die verschiedenen Θ - und z -Modes, s zählt die zu einem bestimmten (m,k) -Paar gehörigen λ -Werte. (Gl. (58) liefert zu jedem (m,k) -Paar unendlich viele Wurzeln $\lambda_{m,k,s}$.) Über die Randbedingungen gehört zu jedem $\xi_{m,k,s}$ eindeutig ein bestimmtes \mathcal{Q} ; daher wird \mathcal{Q} entsprechend indiziert: $\mathcal{Q}_{m,k,s}$. Die $\mathcal{Q}_{m,k,s}$, $\xi_{m,k,s}$ und $\lambda_{m,k,s}$ können im Sinne des nächsten Abschnitts als Grundlösungen verwandt werden.

III. DAS STÖRUNGSVERFAHREN

1. Vorbemerkungen.

Es wird vorausgesetzt, daß die Lösung des magnetohydrodynamischen Stabilitätsproblems für eine Grundkonfiguration bekannt ist; deren Eigenwerte sollen mit λ_i^0 , die Eigenvektoren mit ξ_i^0 bezeichnet werden. Der Index i steht gegebenenfalls hier auch für mehrere Indizes (s. vorigen Abschnitt). Im Fall der Randbedingungen (B) treten zu den Eigenfunktionen ξ_i^0 noch die Vektorpotentiale α_i^0 . Die Lösungen λ_i^0 , ξ_i^0 und (im Fall (B)) α_i^0 werden zusammenfassend als Grundlösungen bezeichnet.

Es soll die Frage nach den Eigenwerten λ_i für ein stationäres System gestellt werden, das in der Nachbarschaft des Grundsystems liegt. Nachbarschaft soll hier so verstanden werden, daß alle in Betracht kommenden Größen mit einem oder mehreren Parametern stetig in die entsprechenden Größen des Grundsystems übergehen. Die Gleichgewichtsgrößen des benachbarten Systems werden als bekannt vorausgesetzt.

Die Abweichung des betrachteten stationären Systems vom stationären Grundsystem wird hier nicht, wie in der Terminologie der Störungsrechnung üblich, als Störung bezeichnet, da dieser Ausdruck in der Stabilitätstheorie zur Beschreibung der betrachteten instationären Zustände (gekennzeichnet durch ξ_i^0 , α_i^0 bzw. ξ_i , α_i) benutzt wird; statt dessen wird der Ausdruck Abweichung gewählt.

Es zeigt sich, daß diejenigen Abweichungen ausgezeichnet sind, bei denen die Berandungen der Bereiche erhalten bleiben. Bei den hier in Betracht gezogenen Randbedingungstypen bedeutet dies, daß die Grenzflächen Plasma - Vakuum und die festen Wände unverändert bleiben. Die Abweichung des stationären Systems vom Grundsystem erscheint daher nur in den Feldgrößen \mathcal{B}_0 , j_0 , p_0 und φ_0 ; solche Abweichungen sollen daher als reine Feldabweichungen bezeichnet werden. Eine reine Feldabwei-

chung liegt z.B. in dem im Abschnitt IV, 4 behandelten Fall einer Θ -Pinchkonfiguration mit kleinem axialem Volumenstrom vor. Der Fall der allgemeinen Abweichung (mit Veränderung der Grenzflächen) läßt sich, wie im 4. Abschnitt gezeigt wird, durch eine Transformation der Randbedingungen auf den Fall der reinen Feldabweichung zurückführen. Daher werden im folgenden zunächst nur reine Feldabweichungen behandelt.

Es ergibt sich die Frage, welche der bekannten Störungsverfahren für das vorliegende Problem in Frage kommen. Da es sich um ein Problem mit komplizierten Randbedingungen handelt, empfiehlt sich eine Methode, bei der die Lösungen durch Integralgleichungen dargestellt werden. Für die Schrödingergleichung wurde ein derartiges Verfahren von Morse und Feshbach¹³ angegeben. Es wird von den Autoren als iteratives Störungsverfahren (iterative-perturbation method) bezeichnet. Dieses Verfahren wird im 3. Abschnitt auf das vorliegende Problem angewandt.

Im Rahmen der Quantenmechanik ist dieses Verfahren nicht das leistungsfähigste. Das Feenbergsche Verfahren, bei dem die Eigenwerte aus der Säkulardeterminante berechnet werden, besitzt einen größeren Konvergenzbereich, das Fredholmsche Verfahren setzt die Feenbergschen Lösungen über deren Konvergenzkreis hinaus analytisch fort. Unterschiede zum iterativen Verfahren ergeben sich jedoch erst ab der 3. Näherung. Der beträchtliche Rechenaufwand, der schon für die Berechnung der 1. Näherung erforderlich ist, läßt es als wenig sinnvoll erscheinen, mit dem Verfahren höhere als 2. Näherungen zu berechnen. Daher kann das iterative Störungsverfahren als für den vorliegenden Zweck ausreichend betrachtet werden.

Die erste Näherung für die Eigenwerte läßt sich auf direktem Wege durch eine Taylor-Entwicklung nach dem Parameter α , der die Abweichung vom Grundsystem beschreibt, herleiten. Dies geschieht im nächsten Abschnitt.

2. Die erste Näherung.

Zur Ermittlung einer ersten Näherung für die Eigenwerte wird auf folgende Weise verfahren: Alle Größen eines Systems mit reiner Feldabweichung von einem bekannten Grundsystem werden nach dem Abweichungsparameter α in eine Potenzreihe entwickelt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die betrachtete Abweichung einparametrig ist; im Falle mehrerer Parameter können jeweils alle Parameter bis auf einen nullgesetzt und die Lösungen superponiert werden.

Es sei

$$\xi = \xi^0 + \xi^1 + \dots$$

$$\lambda = \lambda^0 + \lambda^1 + \dots$$

$$P = P^0 + P^1 + \dots \quad \text{usw.}$$

(60)

Für $F(\xi)$ ergibt sich damit ein entsprechender Ansatz

$$F(\xi) = F^0(\xi) + F^1(\xi) + \dots$$

Der obere Index gibt jeweils die zugehörige Potenz des Parameters α an. Zunächst wird vorausgesetzt, daß das Grundsystem nicht entartet ist, d.h. zu jedem λ^0 gibt es jeweils nur ein ξ^0 ; entartete Grundsysteme werden später betrachtet.

Die Eigenwertgleichung (29) liefert unter Berücksichtigung der Eigenwertgleichung für das Grundsystem in erster Näherung (Glieder $\sim \alpha^2$ und höhere Glieder sind fortgelassen) :

$$\lambda^1 \rho^0 \xi^0 + \lambda^0 \rho^1 \xi^0 + \lambda^0 \rho^0 \xi^1$$

$$= F^0(\xi^1) + F^1(\xi^0)$$

(61)

Für das Grundsystem gilt (φ^0 und λ^0 sind reell) :

$$\varphi^0 \lambda^0 \xi^{0*} = F^{0*}(\xi^0) \quad (62)$$

Skalare Multiplikation von (61) mit ξ^{0*} und skalare Multiplikation von (62) mit ξ^0 und Subtraktion liefert

$$\begin{aligned} \lambda^1 \varphi^0 \xi^{0*} \xi^0 &= \xi^{0*} \cdot F^0(\xi^1) - \xi^1 \cdot F^{0*}(\xi^0) \\ &+ \xi^{0*} \cdot F^1(\xi^0) - \lambda^0 \varphi^1 \xi^{0*} \xi^0 \end{aligned} \quad (63)$$

Nach Integration über das Grundvolumen erhält man

$$\lambda^1 = \int_P \xi^{0*} F^1(\xi^0) d\tau - \lambda^0 \int_P \varphi^1 \xi^{0*} \xi^0 d\tau + \Omega^1 \quad (64)$$

hier ist

$$\Omega^1 = \Omega(\xi^0, \xi^1) \quad (65)$$

wenn allgemein

$$\Omega(\xi, \eta) = \int_P [\xi^* \cdot F^0(\eta) - \eta \cdot F^{0*}(\xi)] d\tau \quad (66)$$

Würden ξ^1 und ξ^0 den gleichen Randbedingungen genügen, so wäre nach (36) $\Omega^1 = 0$, und λ^1 könnte nach (64) aus bekannten Größen berechnet werden. Wie folgende Überlegung zeigt, weichen jedoch die Randbedingungen für ξ^1 von denen für ξ^0 ab.

Die Randbedingungen für ξ haben die Form

$$\mathcal{R}(\xi) = 0 \quad (67)$$

wo \mathcal{R} ein linearer Operator ist, der auf den Vektor ξ wirkt. Mit $\xi = \xi^0 + \xi^1 + \dots$, und $\mathcal{R} = \mathcal{R}^0 + \mathcal{R}^1 + \dots$ wird in erster Näherung

$$\mathcal{R}^0(\xi^1) = -\mathcal{R}^1(\xi^0) \quad (68)$$

während ξ^0 auf dem Rande

$$\mathcal{R}^0(\xi^0) = 0 \quad (69)$$

erfüllt.

Wegen der Inhomogenität der Randbedingungen verschwindet Ω^1 nicht. Es gelingt jedoch, Ω^1 durch die Inhomogenitäten $-\mathcal{R}^1(\xi^0)$ auszu-
drücken. Da diese bekannt sind, kann dann λ^1 aus (64) berechnet wer-
den.

Es besteht daher zunächst die Aufgabe, das Integral Ω^1 zu berechnen. Nach (37), (65) und (66) ist

$$\begin{aligned} \Omega^1 = \int_{\sigma} d\sigma \, \mu^0 \cdot \left\{ \xi^{0*} \left[\gamma \rho^0 \nabla \cdot \xi^1 - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}_0^0 \cdot \nabla \times (\xi^1 \times \mathcal{L}_0^0) + \xi^1 \cdot \mathcal{J}_0^0 \times \mathcal{L}_0^0 \right] \right. \\ \left. - \xi^1 \left[\gamma \rho^0 \nabla \cdot \xi^0 - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}_0^0 \cdot \nabla \times (\xi^0 \times \mathcal{L}_0^0) + \xi^0 \cdot \mathcal{J}_0^0 \times \mathcal{L}_0^0 \right]^* \right\} \end{aligned} \quad (70)$$

Die Berechnung von Ω^1 aus (70) erfolgt für die beiden Randbedingungs-
typen getrennt; dabei wird der untere Index 0 der Gleichgewichtsgrößen
weggelassen.

(A) Die Randbedingung für ξ^1 laute

$$\mu^0 \cdot \xi^1 = \Pi(\xi^0). \quad (71)$$

Im Fall der reinen Feldabweichung, der hier betrachtet wird, ist
 $\Pi = 0$. Dennoch wird in (71) eine auf dem Rand definierte Funk-
tion $\Pi(\xi^0)$ berücksichtigt, da dies die Erweiterung auf allgemeinere

Systeme erleichtert, s. Abschnitt 4. Dasselbe trifft für \vec{P} in (75) und die α^0 -Abhängigkeit des Vektors $\vec{\Psi}$ in (74) zu, der bei reiner Feldabweichung nur von ξ^0 abhängt.

Damit wird (der untere Index bei Ω^1 bezeichnet den Randbedingungstyp)

$$\Omega_A^1 = - \int_{\sigma} d\sigma \Pi \left[\gamma p^0 \nabla \cdot \xi^0 - \frac{1}{\mu_0} \hat{L}^0 \cdot \nabla \times (\xi^0 \times \hat{L}^0) + \xi^0 \cdot \hat{J}^0 \times \hat{L}^0 \right]^* \quad (72)$$

Damit ist Ω_A^1 auf die bekannten Funktionen Π , ξ^0 und die ebenfalls bekannten Gleichgewichtsgrößen des Grundsystems zurückgeführt.

(B) Die Randbedingungen für ξ^1 und α^1 ergeben sich aus (31 - 33), in der Form (68) geschrieben, wie folgt:

$$- \gamma p^0 \nabla \cdot \xi^1 + \frac{1}{\mu_0} \hat{L}^0 \cdot [\nabla \times (\xi^1 \times \hat{L}^0) + \xi^1 \cdot \nabla \hat{L}^0] - \frac{1}{\mu_0} \hat{L}^0 \cdot [\nabla \times \alpha^1 + \xi^1 \cdot \nabla \hat{L}^0] = \phi(\xi^0, \alpha^0) \quad (73)$$

$$\hat{u}^0 \times \alpha^1 + \hat{u}^0 \cdot \xi^1 \hat{L}^0 = \vec{\Psi}(\xi^0, \alpha^0) \quad (74)$$

$$\hat{u}^0 \times \alpha^1 = \vec{P}(\alpha^0) \quad (75)$$

Die Größen ϕ , $\vec{\Psi}$, \vec{P} sind die Inhomogenitäten, die durch Übergang zum abweichenden System auftreten; sie hängen von den Koordinaten auf der jeweils betrachteten Fläche ab.

Die Berechnung von Ω^1 ist hier umständlicher als im Fall (A) und wird im Anhang durchgeführt. Es ergibt sich

$$\Omega_B^1 = - \int_{VP} d\sigma [\hat{u}^0 \cdot \xi^0 \times \phi + \frac{1}{\mu_0} \vec{\Psi} \cdot (\nabla \times \alpha^0)^*] - \frac{1}{\mu_0} \int_{VM} d\sigma \vec{P} \cdot (\nabla \times \alpha^0)^* \quad (76)$$

Das erste Integral erstreckt sich über die Grenzfläche Plasma-Vakuum, das zweite über die Vakuum-Metall-Grenze.

Aus (64) kann λ^1 mit Hilfe der Ausdrücke für Ω^1 (72 bzw. 76) berechnet werden. Im Fall $\xi^1 = 0$ und $\Omega^1 = 0$ reduziert sich λ^1 im wesentlichen auf die Arbeit der Störkraft. Das entspricht dem Ergebnis der quantenmechanischen Störungsrechnung, daß sich die Energiestörung in erster Näherung als das mittlere Störpotential ergibt.

Die inhomogenen Anteile der Randbedingungen, also die Größen $\pi, \phi, \vec{\psi}, \vec{p}$ hängen nach (71) und (73 - 75) von den Vektoren ξ^0 und Ω^0 des Grundsystems ab. Setzt man statt dessen in die Inhomogenitäten beliebige Vektoren ξ und Ω ein, und schreibt man das mit diesen Größen berechnete Integral (65) als $\Omega^1(\xi^0, \xi)$ so wird

$$\Omega^1 = \Omega^1(\xi^0, \xi) \quad (77)$$

Diese Schreibweise hebt hervor, daß Ω^1 sich aus bekannten Größen errechnen läßt.

Der Fall der Entartung kann mit dem in der Störungsrechnung bekannten Säkulardeterminanten-Verfahren behandelt werden. Es kommt hier darauf an, diejenigen Linearkombinationen der jeweils zu einem Eigenwert gehörigen Eigenvektoren ξ_r^0 des Grundsystems zu finden, aus denen die Eigenfunktionen mit α stetig hervorgehen. Die gesuchten Linearkombinationen seien mit $\overline{\xi}^0$ bezeichnet:

$$\overline{\xi}^0 = \sum_r c_r \xi_r^0 \quad (78)$$

Mit den Entwicklungen

$$\lambda = \lambda^0 + \lambda^1 + \dots, \quad \xi = \overline{\xi}^0 + \xi^1 + \dots \quad (79)$$

ergibt sich analog zu (64)

$$\begin{aligned} \lambda^1 c_k &= \int [\xi_k^{0*} \cdot F^0(\xi^1) - \xi^1 \cdot F^{0*}(\xi_k^0)] d\tau \quad (80) \\ &+ \sum_r c_r \int \xi_k^{0*} \cdot F^1(\xi_r^0) d\tau - \lambda^0 \sum_r c_r \int \xi_r^{1*} \cdot \xi_r^0 d\tau \end{aligned}$$

Das erste Integral berechnet sich wie früher. Im Fall der Randbedingung (A) tritt jedoch an die Stelle von $\Pi(\xi^0)$ der Ausdruck

$$\Pi(\bar{\xi}^0) = \sum_r c_r \Pi(\xi_r^0)$$

Mit

$$\begin{aligned} L_A^1(\xi_k^0, \xi_r^0) &= \int_p \xi_k^{0*} \cdot F^1(\xi_r) d\tau - \lambda^0 \int p^1 \xi_k^{0*} \cdot \xi_r^0 d\tau \\ &+ \Omega_A^1(\xi_k^0, \xi_r^0) \end{aligned} \quad (81)$$

folgt

$$c_k \lambda^1 = \sum_r c_r L_A^1(\xi_k^0, \xi_r^0) \quad (82)$$

Die Koeffizientendeterminante dieses homogenen linearen Systems für die c_k muß verschwinden:

$$|L_A^1(\xi_k^0, \xi_r^0) - \delta_{kr} \lambda^1| = 0 \quad (83)$$

Hieraus lassen sich die λ^1 - Werte berechnen. Liegt keine Entartung vor, so reduziert sich (83) auf den Ausdruck (64) .

Für die Randbedingungen (B) ergibt sich eine entsprechende Säkulardeterminante:

$$|L_B^1(\xi_k^0, \xi_r^0) - \delta_{kr} \lambda^1| = 0 \quad (84)$$

L_B^1 ist analog zu L_A^1 definiert.

Ist die Matrix $L^1(\xi_k^0, \xi_r^0)$ bereits diagonal, so folgt

$$\lambda_k^1 = L^1(\xi_k^0, \xi_k^0) \quad (85)$$

d.h. die Berechnung der λ_k^1 erfolgt so, als ob keine Entartung vorläge.

Aus den in diesem Abschnitt hergeleiteten Ausdrücken (64) bzw. (83) und (84) können die Eigenwerte in erster Näherung berechnet werden.

Zur Diskussion der Möglichkeiten, höhere Näherungen zu gewinnen, wird im folgenden Abschnitt das iterative Störungsverfahren¹³ auf das vorliegende Randwertproblem angewandt.

3. Höhere Näherungen.

Das iterative Störungsverfahren besteht in der Transformation der zu lösenden Differentialgleichung mit den zugehörigen Randbedingungen in eine Integralgleichung, die zusammen mit einer Gleichung für die Eigenwerte iterativ gelöst wird. Für das vorliegende Problem, Lösung des Eigenwertproblems (29) mit Randbedingungen (A) oder (B) muß der Formalismus, der für skalare Funktionen mit Randbedingungen im Unendlichen vorliegt¹³, für Vektorfunktionen mit Randbedingungen im Endlichen umgeschrieben werden. An die Stelle der Greenschen Funktion tritt dabei der Greensche Operator¹⁴.

Der Übergang zur Integralgleichung wird hier mit Hilfe des Diracschen "Bracket" - Formalismus¹⁵ durchgeführt. Dieser Kalkül wird als bekannt vorausgesetzt; einige im folgenden benötigte Definitionen und Beziehungen sind im Anhang zusammengestellt.

Den Verschiebungsvektoren $\xi(\mathcal{U})$ und $\xi(\tilde{\mathcal{U}})$ an den Orten \mathcal{U} und $\tilde{\mathcal{U}}$ werden auf folgende Weise Bra- und Ket - Vektoren zugeordnet:

$$\begin{aligned} \xi(\mathcal{U}) &\leftrightarrow |\xi\rangle & \xi^*(\mathcal{U}) &\leftrightarrow \langle\xi| \\ \xi(\tilde{\mathcal{U}}) &\leftrightarrow |\tilde{\xi}\rangle & \xi^*(\tilde{\mathcal{U}}) &\leftrightarrow \langle\tilde{\xi}| \end{aligned} \tag{86}$$

Das Skalarprodukt wird festgelegt als

$$\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = \langle \tilde{\xi}_1 | \tilde{\xi}_2 \rangle = \int \xi_1^* \cdot \xi_2 d\tau, \quad (87)$$

wo sich die Integration über das Plasmavolumen des Grundsystems erstreckt. Dann gilt die Orthogonalitätsrelation (38) in der Form

$$\langle \xi_i | \rho | \xi_k \rangle = \delta_{ik} \quad (88)$$

Die Eigenwertgleichung (29) erhält die Form

$$F | \xi \rangle - \lambda \rho | \xi \rangle = 0 \quad (89)$$

Mit der Aufspaltung

$$F = F^0 + F^a, \quad \rho = \rho^0 + \rho^a \quad (90)$$

(der Index a bezieht sich auf "Abweichung") wird

$$F^0 | \xi \rangle - \lambda \rho^0 | \xi \rangle = -F^a | \xi \rangle + \lambda \rho^a | \xi \rangle \quad (91)$$

Für das Grundsystem gilt

$$F^0 | \xi_i^0 \rangle - \lambda_i^0 \rho^0 | \xi_i^0 \rangle = 0 \quad (92)$$

Bei entarteten Systemen seien hier bereits die Linearkombinationen $\bar{\xi}^0$ gewählt, die für alle in erster Ordnung aufgehobenen Entartungen nach dem vorigen Abschnitt berechnet werden können.

Für das folgende wird der Greensche Operator $G(\varpi | \tilde{\varpi})$ benötigt; er genüge der Operatorgleichung

$$F^0 G(\varpi | \tilde{\varpi}) - \lambda \rho^0 G(\varpi | \tilde{\varpi}) = e(\varpi | \tilde{\varpi}) \quad (93)$$

Der Operator $e(\varpi | \tilde{\varpi})$ steht anstelle der δ -Funktion bei entsprechenden Problemen mit skalaren Lösungsfunktionen. Er ist der Ein-

heitsoperator mit der zusätzlichen Eigenschaft, das Argument eines Vektors ξ von \tilde{u} nach u zu verschieben:

$$e(u|\tilde{u})|\tilde{\xi}\rangle = |\xi\rangle; \quad (94)$$

für den adjungierten Operator gilt dann

$$\overline{e(u|\tilde{u})} = e(\tilde{u}|u) \quad (95)$$

Der Ansatz

$$G(u|\tilde{u}) = \sum_{i,k} |\xi_i^0\rangle G_{ik} \langle \xi_k^0| \quad (96)$$

liefert, in (93) eingesetzt unter Berücksichtigung von (88) und (92)

$$G_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\lambda_i^0 - \lambda} \quad (97)$$

damit wird

$$G(u|\tilde{u}) = \sum_i \frac{|\xi_i^0\rangle \langle \tilde{\xi}_i^0|}{\lambda_i^0 - \lambda} \quad (98)$$

analog zur Entwicklung der Greenschen Funktion bei skalaren Problemen.

Für den adjungierten Operator $\overline{G(u|\tilde{u})}$ ergibt sich

$$\overline{G(u|\tilde{u})} = G(\tilde{u}|u) = \sum_i \frac{|\tilde{\xi}_i^0\rangle \langle \xi_i^0|}{\lambda_i^0 - \lambda} \quad (99)$$

Die zu (93) adjungierte Gleichung lautet dann

$$G(\tilde{u}|u)\overline{F^0} - G(\tilde{u}|u)\lambda F^0 = e(\tilde{u}|u) \quad (100)$$

Durch Anwendung von $G(\tilde{u}|u)$ auf (91) und Anwendung der Operatorgleichung (100) auf $|\xi\rangle$ ergibt sich nach Subtraktion für $|\tilde{\xi}\rangle$ der Ausdruck

$$|\tilde{\xi}\rangle = G(\tilde{u}|u) [\overline{F^0}|\xi\rangle - F^0|\xi\rangle - F^a|\xi\rangle + F^a\lambda|\xi\rangle] \quad (101)$$

Mit (99) folgt daraus unter Berücksichtigung von $\langle \xi_i^0 | \bar{F}^0 | \xi \rangle = \langle \xi | F^0 | \xi_i^0 \rangle^*$

$$|\tilde{\xi}\rangle = \sum_i \frac{|\tilde{\xi}_i^0\rangle}{\lambda_i^0 - \lambda} \left[\langle \xi | F^0 | \xi_i^0 \rangle^* - \langle \xi_i^0 | F^0 | \xi \rangle - \langle \xi_i^0 | F^a | \xi \rangle + \langle \xi_i^0 | \lambda \rho^a | \xi \rangle \right] \quad (102)$$

Geht man mit Hilfe der Zuordnungen (86) wieder zu den Vektoren $\xi(\mathcal{U})$ und $\xi(\tilde{\mathcal{U}})$ zurück, so erhält man mit (66):

$$\xi(\tilde{\mathcal{U}}) = \sum_i \frac{\xi_i^0(\tilde{\mathcal{U}})}{\lambda_i^0 - \lambda} \left[-\Omega(\xi_i^0, \xi) - \int \xi_i^{0*} F^a(\xi) d\tau + \lambda \int \rho^a \xi_i^{0*} \cdot \xi d\tau \right] \quad (103)$$

Die Berechnung des Integrals $\Omega(\xi_i^0, \xi)$ erfolgt ganz analog zur Herleitung von Ω^1 im vorigen Abschnitt; man erhält

$$\Omega_A = - \int_{\sigma} d\sigma \Pi(\xi) \left[\mathcal{P}^0 \nabla \cdot \xi^0 - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}^0 \nabla \times (\xi^0 \times \mathcal{B}^0) + \xi^0 \cdot \dot{\mathcal{J}}^0 \times \mathcal{B}^0 \right]^* \quad (104)$$

$$\Omega_B = - \int_{VP} d\sigma \left[u^0 \cdot \xi^{0*} \phi(\xi, a) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\Psi}(\xi, a) \cdot (\nabla \times a^0)^* \right] - \frac{1}{\mu_0} \int_{VM} d\sigma \vec{P}(a) \cdot (\nabla \times a^0)^* \quad (105)$$

Die Größen $\pi(\xi)$, $\phi(\xi, \alpha)$, $\vec{\psi}(\xi, \alpha)$, $\vec{p}(\alpha)$ sind die Inhomogenitäten der in der Form (71) und (73 - 75) geschriebenen Randbedingungen für ξ und α .

Es ist zweckmäßig, von der Summe in (103) den Teil abzuspalten, den ξ für $\alpha \rightarrow 0$ annimmt. Dazu wird diejenige Lösung $\xi = \xi_n$ betrachtet, für die

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \xi = \xi_n^0 \quad (106)$$

gilt; (103) kann dann umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned} \xi_n = \xi_n^0 + \sum_{i \neq n} \frac{\xi_i^0}{\lambda_i^0 - \lambda} \left[\lambda \int p^a \xi_i^{0*} \xi_n d\tau \right. \\ \left. - \int \xi_i^{0*} F^a(\xi_n) d\tau - \Omega(\xi_i^0, \xi_n) \right] \end{aligned} \quad (107)$$

Hier ist der Faktor von ξ_n^0 gleich 1 gesetzt. Das ist möglich, da dieser Faktor sicher nicht verschwindet und da über die Normierung von ξ noch nicht verfügt wurde. Diese Bedingung ergibt

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n^0 + \int \xi_n^{0*} F^a(\xi_n) d\tau + \Omega(\xi_n^0, \xi_n)}{1 + \int p^a \xi_n^{0*} \xi_n d\tau} \quad (108)$$

Setzt man hier in die Abweichungsgrößen für ξ_n die nullte Näherung ein, so ergibt sich nach Taylor-Entwicklung des Nenners für die erste Näherung der Eigenwertabweichung der im vorigen Abschnitt auf direktem Wege gewonnene Ausdruck (64).

Zur Ermittlung höherer Näherungen sei zunächst der Fall $\Omega(\xi_n^0, \xi) = 0$ betrachtet. Die k-te Näherung für die Eigenwerte, $\lambda_n^{(k)}$, kann hier auf folgende Weise gewonnen werden. ξ_n^0 auf der rechten Seite von (107) für ξ_n eingesetzt, liefert die erste Näherung für ξ_n , $\xi_n^{(1)}$; $\xi_n^{(1)}$ ein-

gesetzt ergibt $\xi_n^{(2)}$ und so fort. Nach $k - 1$ Iterationsschritten ist $\xi_n^{(k-1)}$ durch die ξ_i^0 und den noch unbekannten Eigenwert λ_n ausgedrückt. Ersetzt man in (108) ξ_n durch $\xi_n^{(k-1)}$, so erhält man eine Gleichung, in der nur noch λ_n unbekannt ist. Die Lösung $\lambda_n^{(k)}$ kann ebenfalls durch Iteration gewonnen werden.

Die 2. Näherung $\lambda_n^{(2)}$ ergibt sich nach dieser Vorschrift wie folgt. Zunächst ist $\xi_n^{(1)}$ aus (107) zu berechnen:

$$\begin{aligned} \xi_n^{(1)} = \xi_n^0 + \sum_{i \neq n} \frac{\xi_i^0}{\lambda_i^0 - \lambda_n} \left[\lambda \int p^a \xi_i^{0*} \cdot \xi_n^0 d\tau \right. \\ \left. - \int \xi_i^{0*} \cdot F^a(\xi_n^0) d\tau \right] \end{aligned} \quad (109)$$

Mit dieser Näherung für ξ_n ergibt sich aus (108)

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n^0 + F_{nn}^a + \sum_{i \neq n} \frac{F_{ni}^a}{\lambda_i^0 - \lambda_n} [\lambda_n \beta_{in}^a - F_{in}^a]}{1 + \beta_{nn}^a + \sum_{i \neq n} \frac{\beta_{ni}^a}{\lambda_i^0 - \lambda_n} [\lambda_n \beta_{in}^a - F_{in}^a]} \quad (110)$$

Hier sind F_{ik}^a und β_{ik}^a die Matrixelemente

$$F_{ik}^a = \int \xi_i^{0*} \cdot F^a(\xi_k^0) d\tau \quad (111)$$

$$\beta_{ik}^a = \int p^a \xi_i^{0*} \cdot \xi_k^0 d\tau$$

(110) liefert in erster Näherung (Produkte von Abweichungsgrößen

sind vernachlässigt)

$$\lambda_n^{(1)} = \lambda_n^0 + F_{nn}^a - \rho_{nn}^a \quad (112)$$

also wieder (64) für $\Omega = 0$. Für die 2. Näherung erhält man

$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\lambda_n^0 + F_{nn}^a + \sum_{i \neq n} \frac{F_{ni}^a}{\lambda_i^0 - \lambda_n^0} [\lambda_n^0 \rho_{in}^a - F_{in}^a]}{1 + \rho_{nn}^a + \sum_{i \neq n} \frac{\rho_{ni}^a}{\lambda_i^0 - \lambda_n^0} [\lambda_n^0 \rho_{in}^a - F_{in}^a]} \quad (113)$$

Die Konvergenz des Iterationsverfahrens wird hier nicht näher untersucht. Als Hinweis können einige zusammenfassende Bemerkungen dienen, die die Konvergenz des analogen quantenmechanischen Verfahrens betreffen. Die Näherungslösungen, die durch Iteration der Integralgleichungen gewonnen werden, konvergieren höchstens bis zu demjenigen Parameterwert α_0 , für den die erste Entartung (Zusammenfallen zweier gestörter Eigenwerte) auftritt. Das Säkulardeterminantenverfahren konvergiert genau bis zu diesem Wert. Das Fredholmsche Verfahren besteht in der analytischen Fortsetzung der Näherungslösungen über den Konvergenzkreis (Radius α_0) hinaus. Alle genannten Verfahren liefern für die beiden ersten Näherungen die gleichen Ausdrücke. Unter der Annahme, daß diese Aussagen auch für das vorliegende Problem zutreffen, kann also gefolgert werden, daß die Ausdrücke (112, 113) die ersten beiden Glieder einer für alle α konvergenten Reihenentwicklung darstellen. Fortgesetzte Iterationen liefern eine Reihe, die höchstens bis zu demjenigen Wert von α konvergiert, für den zwei Eigenwerte λ_i zusammenfallen.

Die bisher entwickelten Ergebnisse bezüglich höherer Näherungen gelten nur für den Fall $\Omega = 0$. Dieser Fall liegt z.B. bei der Randbedingung (A)

mit $\Pi = 0$ vor (reine Feldabweichung). Im Fall $\Omega \neq 0$ erscheinen Oberflächenintegrale, die man nur dann in der oben beschriebenen Weise iterieren kann, wenn ξ und alle in den Inhomogenitäten der Randbedingungen auftretenden Ableitungen von ξ auf den Grenzflächen aus (107) gliedweise berechnet werden können; das bedeutet, daß die Operation \sum_i mit Differentialoperationen und der Operation $\lim_{u \rightarrow u_0}$ (u_0 ist Punkt auf der jeweils betrachteten Grenzfläche) vertauschbar sein muß. Folgende Überlegung zeigt jedoch, daß im Fall $\Omega \neq 0$ diese Bedingung verletzt sein kann. Ω ist nur dann von 0 verschieden, wenn mindestens eine Randbedingung für ξ inhomogen ist:

$$\mathcal{R}^0(\xi) \neq 0.$$

Gliedweises Anwenden von \mathcal{R}^0 auf (107) würde jedoch in jedem Fall $\mathcal{R}^0(\xi) = 0$ liefern, da alle ξ_i^0 homogene Randbedingungen erfüllen. Die Ursache für diese ungleichmäßige Konvergenz auf den Grenzflächen sind Unstetigkeiten, die sich bei Lösung von Randwertproblemen mit inhomogenen Randbedingungen durch Verwendung Greenscher Funktionen stets auf dem Rand ergeben.

Das beschriebene Iterationsverfahren ist auch für $\Omega \neq 0$ anwendbar, wenn es gelingt, den unstetigen Anteil der Reihe (107) in geschlossener Form abzuspalten¹³. Im Fall der Randbedingungen (B) ist ferner die Lösung von (35) mit (74) und (75) für die $\mathcal{O}^{(k)}$ erforderlich.

Diese Komplikationen treten jedoch nur dann auf, wenn Näherungslösungen für ξ berechnet werden. Da zur Ermittlung der ersten Näherung für λ_n nur die ξ_i^0 benötigt werden, wird $\lambda_n^{(1)}$ für beliebiges Ω durch (64) richtig beschrieben.

4. Allgemeine Abweichungen.

Alle bisher gewonnenen Ergebnisse beziehen sich auf Systeme mit reinen Feldabweichungen, also Systeme, in denen die Grenzflächen beim Übergang vom Grundsystem zum abweichenden System unverändert bleiben. In diesem Abschnitt wird diese Voraussetzung aufgehoben. Es wird nur verlangt, daß die Abweichungen der Grenzflächen je durch einen genügend oft differenzierbaren Verschiebungsvektor η beschrieben werden können. Für die Quantenmechanik wurden entsprechende Untersuchungen von Brillouin¹⁶, Feshbach und Colgston¹⁷, Cabrera¹⁸ und von Wassermann^{19,20} angestellt. Die hier benutzte Methode entspricht am ehesten der Darstellung von Wassermann.

Die Grenzflächen des Grundsystems, z.B. die Fläche Plasma-Vakuum im Fall der Randbedingungen (B), seien gegeben in der Form

$$u^0 = u^0(u, v) \quad (114)$$

wo u und v die Parameter der betrachteten Fläche sind. Auf der Grenzfläche sei der Verschiebungsvektor

$$\eta = \eta(u, v) \quad (115)$$

definiert, so daß sich die abweichende Grenzfläche als

$$u = u(u, v) = u^0(u, v) + \eta(u, v) \quad (116)$$

ergibt.

Die Normalen-Vektoren erhält man daraus wie folgt²⁰:

$$n^0 = \frac{\frac{\partial u^0}{\partial u} \times \frac{\partial u^0}{\partial v}}{\sqrt{\left[\frac{\partial u^0}{\partial u} \times \frac{\partial u^0}{\partial v} \right]^2}} \quad (117)$$

$$n = \frac{\frac{\partial u}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial v}}{\sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial v} \right]^2}} \quad (118)$$

Über das Vorzeichen der Quadratwurzeln wird so verfügt, daß die Normalen die früher festgesetzte Richtung erhalten.

Wählt man den Maximalwert von $|\eta|$ als Abweichungsparameter

$$\alpha = |\eta|_{\max} \quad (119)$$

so ergibt sich die Normale n durch Einführung der Beziehung (116) in (118) und Taylor-Entwicklung nach α in der Form

$$n = n^0 + n^a, \quad n^a = n^1 + n^2 + \dots \quad (120)$$

Für n^1 erhält man

$$n^1 = \frac{\frac{\partial u^0}{\partial u} \times \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial u^0}{\partial v} \times \frac{\partial \eta}{\partial u}}{\sqrt{\left[\frac{\partial u^0}{\partial u} \times \frac{\partial u^0}{\partial v} \right]^2}} - n^0 \cdot \frac{P}{\sqrt{\left[\frac{\partial u^0}{\partial u} \times \frac{\partial u^0}{\partial v} \right]^2}} \quad (121)$$

mit

$$P = \left(\frac{\partial u^0}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial u^0}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} + \left(\frac{\partial u^0}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial u^0}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial u^0}{\partial u} \cdot \frac{\partial u^0}{\partial v} \left(\frac{\partial u^0}{\partial v} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial u^0}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} \right)$$

Mit Hilfe einer Transformation der Randbedingungen gelingt es, das Problem mit abweichenden Grenzflächen auf ein Problem mit unveränderten Grenzflächen zurückzuführen, welches mit den in den vorigen Ab -

schnitten dargestellten Mitteln gelöst werden kann. Die Transformation wird bewirkt durch Anwendung eines Verschiebungsoperators \mathcal{M} auf die Randbedingungen; \mathcal{M} ist definiert durch

$$\mathcal{M}q(\psi^0) = q(\psi^0 + \eta) = q(\psi) \quad (122)$$

wo q eine beliebige skalare oder vektorielle Ortsfunktion ist. \mathcal{M} erzeugt also aus der auf der Grenzfläche des Grundsystems genommenen Funktion q eine Funktion, die auf der abweichenden Grenzfläche die gleichen Werte annimmt. Nach (122) kann $\mathcal{M}q(\psi^0)$ als Taylor-Entwicklung von $q(\psi^0 + \eta)$ um ψ^0 geschrieben werden, also

$$\mathcal{M} = 1 + \mathcal{M}^a; \quad \mathcal{M}^a = \mathcal{M}^1 + \mathcal{M}^2 + \dots, \quad \mathcal{M}^1 = \eta \cdot \nabla \quad (123)$$

Es wird ein Grundsystem betrachtet, das durch die Größen

$$\mathcal{L}^0, p^0, \beta^0, f^0, \psi_r^0(u, v) \quad (124)$$

und durch die Eigenvektoren ξ_i^0 und die Eigenwerte λ_i^0 charakterisiert ist; der Index r ist bei ψ_r^0 angefügt, weil es im Fall (B) zwei Grenzflächen gibt.

Für das abweichende System sollen die stationären Größen

$$\mathcal{L}, p, \beta, f, \psi_r(u, v) \quad (125)$$

bekannt sein, wo $\psi_r(u, v)$ gemäß (116) durch $\eta_r(u, v)$ bestimmt ist.

Die Aufspaltung (90) ergibt analog zum vorigen Abschnitt

$$F^0(\xi) - \beta^0 \lambda \xi = -F^a(\xi) + \lambda \beta^a \xi \quad (126)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathcal{R}_r^0(\xi) = -\mathcal{R}_r^a(\xi) \quad \text{für} \quad \psi_r = \psi_r^0 + \eta_r \quad (127)$$

Die Anwendung des Operators \mathcal{D} auf die Randbedingungen liefert *

$$(1 + \mathcal{D}^a) \mathcal{R}_r^o(\xi) = - (1 + \mathcal{D}^a) \mathcal{R}_r^a(\xi), \quad \mathcal{U}_r = \mathcal{U}_r^o \quad (128)$$

oder

$$\mathcal{R}_r^o(\xi) = - \mathcal{R}_r^a(\xi) - \mathcal{D}^a \mathcal{R}_r(\xi), \quad \mathcal{U}_r = \mathcal{U}_r^o \quad (129)$$

Die Randbedingungen (127) auf der abweichenden Grenzfläche sind damit in eine Randbedingung auf der Grenzfläche des Grundsystems transformiert worden.

Das Problem (126) mit Randbedingungen vom Typ (129) auf der Fläche $\mathcal{U}_r^o(u, v)$ ist formal ein Fall reiner Feldabweichungen, der im vorigen Abschnitt eingehend diskutiert wurde. Die Deformation der Grenzflächen äußert sich hier nur im Auftreten zusätzlicher Terme auf der rechten Seite der Randbedingungen. Da über die Struktur dieser Terme im vorigen Abschnitt keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht wurden, können die Ergebnisse von dort direkt übernommen werden. Die Lösungen für ξ und λ ergeben sich daher wieder aus (107) und (108). Die Eigenwerte sind in (64) mit (72) bzw. (76) in erster Näherung berechnet.

Zur Interpretation des Operators \mathcal{D} in (128) bedarf es noch einer Erläuterung bezüglich der in den Randbedingungen erscheinenden Ortskoordinaten. \mathcal{D} wirkt nur auf Funktionen des Ortsvektors, die auch außerhalb der Fläche definiert sind (es sind Ableitungen zu bilden, in die nachträglich die Koordinaten der Fläche eingesetzt werden). Alle Funktionen, die nur auf der Oberfläche definiert sind, wie z.B. die Einheitsnormalen, werden bei der Anwendung von \mathcal{D} als Konstanten behandelt; sie sind jedoch in der Form (120) aufzuspalten.

Im Abschnitt IV, 3 ist der Fall abweichender Grenzflächen an einem Beispiel erläutert.

* Die Anwendung von \mathcal{D} bezieht sich natürlich nicht auf die formal zu den Randbedingungen gezählte Differentialgleichung $\nabla \times \nabla \times \mathcal{U} = 0$.

IV. ANWENDUNGEN

1. Der Plasmazyylinder mit zusätzlichen Oberflächenströmen.

Zur Prüfung des Verfahrens soll zunächst eine Konfiguration betrachtet werden, für die die exakte Lösung bekannt ist.

Als Grundsystem wird die Pinchkonfiguration ohne axiale Magnetfelder und ohne metallische Hülle ($\Lambda \rightarrow \infty$) gewählt. Diesem System wird ein äußeres Magnetfeld B_z in axialer Richtung überlagert; die Eigenwerte sollen für kleine B_z in erster Näherung berechnet werden. Abweichungsparameter ist $\alpha = B_z$. Das stationäre Grundsystem wird beschrieben durch die Größen r_o^o , p^o , φ^o , $B_o^o = B_\Theta(r_o^o)$. Nach (41) gilt die Gleichgewichtsbeziehung

$$p^o = \frac{B_o^{o2}}{2\mu_o} \quad (130)$$

Die Eigenvektoren ξ_i^o und die q_i^o ergeben sich aus (51) und (56) zu

$$\xi_{m,k,s} = c e^{im\theta + ikz} \left\{ \frac{\alpha}{ik} I_m'(x); \right. \\ \left. \frac{m}{kr} I_m(x); I_m(x) \right\} \quad (131)$$

$$q_{m,k,s} = e^{im\theta + ikz} \left\{ G \frac{m}{kr} K_m(y) \right. \\ \left. - E \frac{i|k|}{k} K_m'(y); E \frac{m}{kr} K_m(y) \right. \\ \left. + G \frac{i|k|}{k} K_m'(y); E K_m(y) \right\} \quad (132)$$

Hier ist

$$E = \frac{\alpha B_o^0 I_m'(\alpha r_o^0)}{i k K_m(|k| r_o^0)} C \quad (133)$$

$$G = \frac{\alpha m B_o^0 I_m'(\alpha r_o^0)}{k |k| r_o^0 K_m'(|k| r_o^0)} C \quad (134)$$

$$\alpha^2 = k^2 + \frac{\lambda^0}{v^2} \quad , \quad v^2 = \frac{\gamma p^0}{\rho^0} \quad (135)$$

Die Eigenwerte lassen sich aus der Dispersionsbeziehung (Spezialisierung von (58)) berechnen:

$$\frac{k r_o^{02} \lambda^0 \rho^0 \mu_o I_m(\alpha r_o^0)}{\alpha B_o^{02} I_m'(\alpha r_o^0)} = k r_o^0 + m^2 \frac{|k| K_m(|k| r_o^0)}{k K_m'(|k| r_o^0)} \quad (136)$$

Das abweichende System ist charakterisiert durch r_o , p , ρ , $B_o = B_\Theta(r_o)$, B_z , wo B_z das zusätzliche äußere Magnetfeld ist.

Es gilt

$$p = \frac{B_o^2}{2 \mu_o} \quad , \quad (137)$$

der Beitrag $\frac{B_z^2}{2 \mu_o}$ ist weggelassen, da in B_z linearisiert wird.

Es sei

$$r_o = r_o^0, \quad p = p^0, \quad \rho = \rho^0 \quad (138)$$

Dann liefert (137) auch $B_o^0 = B_o$.

Es handelt sich um ein Problem mit Randbedingungen vom Typ (B) ; daher

ist allgemein nach (64) und (76)

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 = & \int_P \xi^0 \cdot F^1(\xi^0) d\tau - \lambda^0 \int_P \eta^1 \xi^0 \cdot \xi^0 d\tau \\
 & - \int_{PV} \left[\mu \cdot \xi^0 \phi + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \alpha^0)^* \cdot \vec{\psi} \right] d\sigma \\
 & - \frac{1}{\mu_0} \int_{VM} (\nabla \times \alpha^0)^* \cdot \vec{P} d\sigma
 \end{aligned}
 \tag{139}$$

Es ist daher zunächst die Aufgabe gestellt, die Größen F^1 , η^1 , ϕ , $\vec{\psi}$ und \vec{P} zu berechnen. Da $p^1 = 0$ und $\mathcal{L}_i^1 = 0$, ist $F^1 = 0$; ferner ist wegen $\eta = \eta^0$ auch $\eta^1 = 0$ und nach (75) $\vec{P} = 0$.

Die Randbedingung (31) ergibt:

$$-\tau p \nabla \cdot \xi - \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathcal{L}} \cdot \nabla \times \alpha - \frac{1}{\mu_0} \xi \cdot \nabla \frac{\hat{B}^2}{2} = 0 \tag{140}$$

$$-\tau p \nabla \cdot \xi^1 - \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathcal{L}}^0 \cdot \nabla \times \alpha^1 - \frac{1}{\mu_0} \xi^1 \cdot \nabla \frac{\hat{B}^{02}}{2} = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathcal{L}}^1 \cdot \nabla \times \alpha^0 \tag{141}$$

also nach (73)

$$\phi = \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathcal{L}}^1 \cdot \nabla \times \alpha^0 = \frac{1}{\mu_0} B_z (\nabla \times \alpha^0)_z \tag{142}$$

Aus (32) und (74) ergibt sich für $\vec{\psi}$

$$\hat{u} \times \alpha + \hat{u} \cdot \xi \hat{\mathcal{L}} = 0 \tag{143}$$

$$\hat{u} \times \alpha^1 + \hat{u} \cdot \xi^1 \hat{\mathcal{L}}^0 = - \hat{u} \cdot \xi^0 \mathcal{L}^1 \tag{144}$$

$$\vec{\Psi} = - \hat{u} \cdot \xi^0 \mathcal{L}^1 = u \cdot \xi^0 \mathcal{L}^1 \quad (145)$$

Zur Berechnung von λ^1 aus (139) wird folgender Ausdruck benötigt:

$$\begin{aligned} u \cdot \xi^0 \phi + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times a^0)^* \cdot \vec{\Psi} \\ = u \cdot \xi^0 \frac{1}{\mu_0} B_z (\nabla \times a^0)_z + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times a^0)_z^* u \cdot \xi^0 B_z \\ = 2 \frac{B_z}{\mu_0} \operatorname{Re} [U (\nabla \times a^0)_z^*] \end{aligned} \quad (146)$$

Mit (131) und (132) ergibt sich

$$\begin{aligned} u \cdot \xi^0 \phi + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times a^0)^* \cdot \vec{\Psi} \\ = - \frac{2 C C^* m |\alpha I_m'(x_0)|^2 K_m(y_0) B_0 B_z}{\mu_0 k r_0 |k| K'(y_0)} \end{aligned} \quad (147)$$

Da diese Größe nicht mehr von den Koordinaten Θ und z abhängt, reduziert sich die Integration auf eine Multiplikation mit der Oberfläche des Zylinders $2 \pi r_0 L$. CC^* ergibt sich aus (48) zu

$$CC^* = \frac{k^2}{2\pi L \rho g} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2}\right) |\alpha r_0 I_m'(x_0)|^2 + x_0 I_m'(x_0) I_m^*(x_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2}\right) (m^2 + x_0^2) |I_m(x_0)|^2 \end{aligned}$$

Damit liefert (139) als erste Näherung für die Eigenwerte

$$\lambda^1 = \frac{\frac{2mk K_m(\gamma_0) B_0 B_z}{\mu_0 \varphi r_0 \gamma_0 K_m'(\gamma_0)}}{\frac{\lambda^0}{2\alpha^2 v^2} + \frac{I_m(x_0)}{x_0 I_m'(x_0)} - \frac{\lambda^0}{2\alpha^2 v^2} (m^2 + x_0^2) \left| \frac{I_m(x_0)}{x_0 I_m'(x_0)} \right|^2} \quad (149)$$

Die exakte Lösung wird durch die Dispersionsbeziehung (58) bestimmt:

$$\frac{k r_0^2 \lambda^0 \varphi (\mu_0 I_m(\alpha r_0))}{\alpha B_0^2 I_m'(\alpha r_0)} = k r_0 + \left(m + k r_0 \frac{B_z}{B_0} \right)^2 \frac{|k| K_m(\gamma_0)}{k K_m'(\gamma_0)} \quad (150)$$

Durch die Ansätze

$$\lambda = \lambda^0 + \lambda^1, \quad \alpha = \alpha^0 + \alpha^1, \quad \alpha^1 = \frac{\lambda^1}{2\alpha^0 v^2}$$

$$I_m(\alpha r_0) = I_m(x_0) + I_m'(x_0) \alpha^1 r_0$$

$$I_m'(\alpha r_0) = I_m'(x_0) + I_m''(x_0) \alpha^1 r_0$$

und Linearisierung in λ^1 und B_z folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 \varphi r_0 I_m(x_0)}{B_0^2 \alpha^0 I_m'(x_0)} \left[\lambda^1 + \lambda^0 r_0 \frac{I_m'(x_0)}{I_m(x_0)} \alpha^1 - \lambda^0 \frac{\alpha^1}{\alpha^0} - \frac{\lambda^0 \alpha^1 r_0 I_m''(x_0)}{I_m(x_0)} \right] \\ &= \frac{2mk r_0 B_z K_m(\gamma_0)}{B_0 \gamma_0 K_m'(\gamma_0)} \end{aligned} \quad (151)$$

Hieraus ergibt sich für λ^1 der gleiche Ausdruck, der mit Hilfe der Störungsrechnung gewonnen wurde, Gl. (149).

Die Dispersionsbeziehung (150) wurde früher¹² für die Kink-Instabilitäten ($m = 1$) ausgiebig diskutiert.

In den folgenden Abschnitten wird das Stabilitätsverhalten weiterer Systeme in der Nachbarschaft des homogenen Zylinders untersucht.

2. Plasmazylinder mit Temperaturgradient.

Bei allen bisher vorliegenden Untersuchungen über die Stabilität des Pinches wurde mit konstantem Druck auch konstante Dichte und damit konstante Temperatur vorausgesetzt. Solange nur nach der Stabilität (Vorzeichen der Eigenwerte) gefragt ist, bedeutet diese Annahme keine Beschränkung der Allgemeinheit. Dies erkennt man bei Anwendung des Energie-Prinzips aus der Tatsache, daß die Dichteverteilung (bei Abwesenheit von Gravitation) in den Ausdruck für δW nicht eingeht⁷:

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{1}{2} \int_P d\tau \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{q}^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{q} \times \boldsymbol{\xi} + \delta p (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p \right] \\ & + \int_V d\tau \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \mathbf{a})^2 + \frac{1}{2} \int_V d\tau (\mu \cdot \boldsymbol{\xi})^2 \mu \cdot \left[\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (152)$$

Ein (in) stabiles System bleibt also bei beliebiger Abänderung des Dichteverlaufs immer (in) stabil, wenn nur der Druck p und die Magnetfeldverteilung ungeändert bleiben. Diese Aussage beinhaltet jedoch nicht, daß der Übergang zu einem anderen Dichteprofil keinen Einfluß auf die Eigenwerte hätte, es bleiben lediglich die Vorzeichen erhalten.

Im Zusammenhang mit der eingangs gemachten Bemerkung bezüglich "praktisch stabiler" Systeme im Pulsbetrieb (instabile Systeme mit maximalen Anwuchszeiten $>$ Pulszeit) ist jedoch auch diese Veränderung der Eigenwerte interessant.

Die Gleichung (108) liefert für den Fall, daß die betrachtete Abweichung

nur in einer Abweichung der Dichtefunktion ϱ besteht

$$\varrho = \varrho^0 + \varrho^a \quad (153)$$

den (exakten) Ausdruck:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n^0}{1 + \int \varrho^a \xi_n^{0*} \xi_n d\tau} \quad (154)$$

In erster Näherung ergibt sich

$$\lambda_n^1 = \frac{\lambda_n^0}{1 + \int \varrho^1 \xi_n^{0*} \xi_n^0 d\tau} \quad (155)$$

woraus die λ_n^1 berechnet werden können. Auch aus (155) ist ersichtlich, daß die Dichtefunktion das Vorzeichen von λ_n nicht ändern kann.

Man gelangt aus (155) zu der Abschätzung

$$\lambda_n^1(\varrho_{\max}) \leq \lambda_n^1 \leq \lambda_n^1(\varrho_{\min}) \quad (156)$$

$\lambda_n^1(\varrho_{\max})$ bedeutet, daß ϱ im ganzen Volumen durch seinen Maximalwert ersetzt ist, $\lambda_n^1(\varrho_{\min})$ ist entsprechend definiert. Höhere Näherungen ergeben sich nach Abschnitt III, 3.

Zusammenfassend kann folgendes gesagt werden: Auf die Stabilität hat der Verlauf von ϱ keinen Einfluß. Die Eigenfrequenzen werden abgeändert und liegen in erster Näherung zwischen den Werten, die man erhält, wenn man die Dichte über das betrachtete Volumen konstant annimmt, und einmal den Maximalwert und einmal den Minimalwert einsetzt.

Der Einfluß der Gravitationskräfte wird in dieser Arbeit durchweg außer acht gelassen, da in allen bisher durchgeführten Experimenten mit Hochtemperaturplasmen die Lorentz- und Druckkräfte die Schwere weit überwiegen. Für Systeme, in denen die Gravitation nicht vernachlässigt werden kann, ist sie durch den Summanden $-\nabla \cdot (\varrho \xi) \varrho$ in (25) ohne weiteres zu berücksichtigen. Die in diesem Abschnitt durchgeführte

Abschätzung des Einflusses der Dichteverteilung auf die Eigenwerte ist jedoch dann nicht mehr zulässig, da die Dichte dann auch in F^a erscheint. Es können Instabilitäten auftreten, die den Rayleigh-Taylor-Instabilitäten in der gewöhnlichen Hydrodynamik entsprechen^{3, 21, 22}.

3. Systeme mit kleinen Abweichungen von der Zylindersymmetrie.

In diesem Abschnitt werden Systeme betrachtet, deren Grenzflächen von den Grenzflächen des Grundsystems abweichen. Als Grundsystem wird jeweils eine zylindersymmetrische Konfiguration gewählt. Eine allgemeine Methode zur Behandlung solcher Systeme wurde in Abschnitt III, 4 entwickelt.

Zunächst soll diese Methode anhand eines einfachen Beispiels erläutert werden; dann werden einige allgemeine Aussagen über die erste Näherung für die Eigenwerte gemacht.

Als Beispiel wird eine Pinchkonfiguration mit Oberflächenströmen ohne axiale Magnetfelder und äußere Leiter gewählt. Der Radius des Plasmas sei $r_0 + \epsilon$. Das Grundsystem sei eine entsprechende Konfiguration mit gleichem Plasmadruck und dem Radius r_0 . Für beide Systeme liegt die exakte Lösung vor; sie wurde in Abschnitt II, 2 berechnet.

Nach Abschnitt III, 4 ist der Verschiebungsoperator \mathcal{W} auf die Randbedingungen anzuwenden. Die Randbedingungen ergeben sich im vorliegenden Fall durch Spezialisierung von (31) und (32) zu

$$-\gamma p \nabla \cdot \xi - \frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot \nabla \times a - \frac{1}{\mu_0} \xi \cdot \nabla \frac{\hat{B}^2}{2} = 0 \quad (157)$$

$$\hat{u} \times a + \hat{u} \cdot \xi \hat{L} = 0 \quad (158)$$

Sie sind auf der Fläche $r = r_0 + \epsilon$ zu erfüllen.

Durch Anwendung des Operators \mathcal{M} , der hier nach (123) zerlegt ist, erhält man zwei Randbedingungen auf der Fläche $r = r_0$:

$$\begin{aligned} -\gamma p (1 + \mathcal{M}^a) \nabla \cdot \xi - \frac{1}{\mu_0} (1 + \mathcal{M}^a) [(\hat{\mathcal{L}}^0 + \hat{\mathcal{L}}^a) \cdot \nabla \times \mathcal{Q}] \\ - \frac{1}{\mu_0} (1 + \mathcal{M}^a) \xi \cdot \nabla \left[\left(\frac{B^2}{2} \right)^0 + \left(\frac{B^2}{2} \right)^a \right] = 0 \end{aligned} \quad (159)$$

$$\begin{aligned} (1 + \mathcal{M}^a) (\hat{\mu}^0 \times \mathcal{Q}) \\ + (1 + \mathcal{M}^a) [\hat{\mu}^0 \cdot \xi (\hat{\mathcal{L}}^0 + \hat{\mathcal{L}}^a)] = 0 \end{aligned} \quad (160)$$

Eine Umordnung der Terme ergibt

$$-\gamma p \nabla \cdot \xi - \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathcal{L}}^0 \cdot \nabla \times \mathcal{Q} - \frac{1}{\mu_0} \xi \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right)^0 = \phi \quad (161)$$

$$\hat{\mu}^0 \times \mathcal{Q} + \hat{\mu}^0 \cdot \xi \hat{\mathcal{L}}^0 = \vec{\Psi} \quad (162)$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \phi = \gamma p \mathcal{M}^a \nabla \cdot \xi + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{M}^a (\hat{\mathcal{L}}^0 \cdot \nabla \times \mathcal{Q}) \\ + \frac{1}{\mu_0} \hat{\mathcal{L}}^a \cdot \nabla \times \mathcal{Q} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{M}^a (\xi \cdot \nabla \frac{B_0^2}{2}) + \frac{1}{\mu_0} \xi \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right)^a \end{aligned} \quad (163)$$

$$\vec{\Psi} = \mathcal{M}^a (\mu^0 \times \mathcal{Q}) + \mathcal{M}^a (\mu^0 \cdot \xi \hat{\mathcal{L}}^0) + \mu^0 \cdot \xi \hat{\mathcal{L}}^a \quad (164)$$

Die Normale μ wird hier nicht variiert, denn nach (118) ist $\mu = \mu^0$.

\mathcal{M}^a ergibt sich nach (122) aus dem Verschiebungsvektor η , der hier nur eine radiale Komponente der Größe ϵ besitzt. In erster Näherung

ist daher nach (123)

$$\lambda' = \epsilon \frac{\partial}{\partial r} \quad (165)$$

Die erste Näherung für die Eigenwerte kann nach (64) und (76) mit (163) und (164) berechnet werden. Sie ergibt sich in der Form

$$\lambda^{(1)} = \lambda^0 + \epsilon \frac{k^3 B_0^2}{\mu_0 \rho} H, \quad (166)$$

wo H ein Ausdruck ist, der in komplizierter Weise von ar_0 und kr_0 abhängt.

Die exakte Lösung ist, durch (136) gegeben, wo r_0 durch $r_0 + \epsilon$ zu ersetzen ist. Durch Linearisierung in ϵ ergibt sich genau der Ausdruck (166).

Es soll nun die Gesamtheit aller Systeme betrachtet werden, deren Grenzflächen aus denen eines zylindersymmetrischen Grundsystems durch eine Verschiebung η erzeugt werden können, wobei die maximale Verschiebung klein gegen den Radius bleiben soll. Nach (119) wird der Maximalwert von $|\eta|$ als Abweichungsparameter gewählt.

Für die so definierten Systeme besitzt λ^1 folgende Eigenschaften. Der Verschiebungsvektor η ist eine Funktion der Flächenparameter u und v , die hier mit den Zylinderkoordinaten Θ und z identifiziert werden können:

$$\eta = \eta(\Theta, z) \quad (167)$$

Durch Fourier-Analyse ergibt sich

$$\eta = \sum_{rs} \eta_{rs} = \sum_{rs} \hat{\eta}_{rs} e^{ir\theta + is \frac{2\pi z}{L}} \quad (168)$$

Hier ist wieder ein System der Länge L mit identifizierbaren Enden vorausgesetzt. Da λ^1 in η linear ist, liefert jedes Glied dieser Reihe

unabhängig einen Beitrag λ^1_{rs} zu λ^1 :

$$\lambda^1 = \sum_{rs} \lambda^1_{rs} \quad (169)$$

In der Reihe (169) verschwinden alle Glieder außer dem Term, der von der koordinatenunabhängigen Verschiebung herrührt; denn die in den Inhomogenitäten der Differentialgleichung für ξ und der zugehörigen Randbedingungen auftretenden Größen F^1 , φ^1 und Π bzw. ϕ , ψ , \bar{P} können zur Berechnung von λ^1 ebenfalls nach (169) aufgespalten werden; jeder Beitrag enthält dann als Faktor einen Exponentialausdruck der Form

$$e^{ir\Theta + is \frac{2\pi z}{L}},$$

da sich dieser Faktor bei allen hier in Betracht kommenden algebraischen und infinitesimalen Operationen in erster Näherung reproduziert. Die Integration über die Koordinaten Θ und z liefert daher

$$\lambda^1 = \sum_{rs} \lambda_{rs} \delta_{r0} \delta_{s0} = \lambda_{00} \quad (170)$$

In erster Näherung bringt also nur die mittlere Verschiebung der Oberfläche

$$\eta_{00} = \frac{1}{S} \int \eta d\sigma \quad (171)$$

einen Beitrag zu den Eigenwerten. Für alle Abweichungen, die keine mittlere Verschiebung η_{00} enthalten, ergibt sich $\lambda^1 = 0$.

Für eine Θ - Pinch-Konfiguration mit beliebiger geringer Abweichung von der Zylindersymmetrie hat diese Aussage folgende Konsequenz. Eine koordinatenunabhängige Verschiebung η_{00} kann hier nicht zu Instabilitäten führen, da die Θ - Pinch-Konfiguration bei jedem Radius stabil bzw. indifferent ist. Etwaige Instabilitäten, die durch die Oberflächenkrümmung auftreten, besitzen daher Eigenwerte und Anwachszeiten der Ordnungen

$$\lambda = O \left[\left(\frac{|\eta|_{max}}{r_0} \right)^2 \right], \quad \tau = O \left[\frac{r_0}{|\eta|_{max}} \right] \quad (172)$$

In BFKK ist gezeigt, daß für rein rotationssymmetrische Abweichungen von der Zylindersymmetrie in jedem Fall derartige Instabilitäten auftreten. Bei rein stationären Maschinen müssen diese Instabilitäten durch zusätzliche Maßnahmen beseitigt werden. Dies ist einer der Gründe, die zur Stellarator-Konzeption führten. Für Systeme im Pulsbetrieb ist, wie früher erläutert wurde, das Verhältnis von Anwachszeit τ zu Pulsdauer T wesentlich. Für grobe Abschätzungen führt in einfachen Fällen eine Dimensionsanalyse in Verbindung mit (172) zu einem Ausdruck für τ . Für den Θ - Pinch ohne inneres Magnetfeld ergibt sich danach (für unendlich lange Zylinder)

$$\tau = \left(\frac{\mu_0 g}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r_0^2}{|\eta|_{\max}} \quad (173)$$

Der Übergang vom Zylinder zum Torus kann im Rahmen dieser Theorie nicht direkt durchgeführt werden, da sich auf der Oberfläche des Zylinders kein Verschiebungsvektor definieren läßt, der eine toroidale Oberfläche erzeugt und dabei betragsmäßig überall klein gegen den Radius bleibt. Außerdem ist hier nicht ohne weiteres ersichtlich, ob die toroidale Lösung eindeutig und stetig in die Lösung für den Zylinder überführt werden kann. Sieht man jedoch von dieser hier nicht näher diskutierten Schwierigkeit ab, so kann auf folgende Weise eine Näherungslösung für den Torus konstruiert werden. x_1, x_2, x_3 seien Zylinder-Koordinaten, in denen die betrachtete Grenzfläche des Grundsystems (Zylinders) die Koordinatenfläche $x_1 = A$ ist.

Daneben werden die Koordinaten y_1, y_2, y_3 betrachtet, in denen die abweichende Fläche (Torusfläche) durch $y_1 = A$ beschrieben wird. Die Randbedingungen lauten dann für das Grundsystem

$$\left\{ \mathcal{R}_x^\circ [\xi^\circ(x)] \right\}_{x_1 = A} = 0 \quad (174)$$

und für das abweichende System

$$\left\{ \mathcal{R}_y [\xi(y)] \right\}_{y_1 = A} = 0 \quad (175)$$

Die Indizes x und y bei \mathcal{Q} bezeichnen die Variablen, in denen \mathcal{Q} aus-
zudrücken ist. Mit $\mathcal{Q}_y = \mathcal{Q}_y^0 + \mathcal{Q}_y^a$ ergibt sich

$$\{\mathcal{Q}_y^0[\xi(y)]\}_{y_1=A} = -\{\mathcal{Q}_y^a[\xi(y)]\}_{y_1=A} \quad (176)$$

Ganz analog erscheinen Inhomogenitäten in den Differentialgleichungen
(29) und (35). Es läßt sich zeigen, daß alle auftretenden Inhomogenitäten
mit a gegen 0 gehen, wenn als Abweichungsparameter a das Radienver-
hältnis r_0/a gewählt wird (a ist großer Radius des Torus).

Auf diese Weise entsteht formal wieder ein Problem mit inhomogenen
Randbedingungen auf den Grenzflächen des Grundsystems, welches mit
Hilfe der in III dargestellten Methode gelöst werden kann. Wegen der neu
hinzukommenden Inhomogenität von (35) erscheint bei den Randbedingungen
(B) im Ausdruck für Ω ein zusätzliches Integral über den Vakuumbereich;
dieser Fall ist bei der Berechnung von Ω_B im Anhang berücksichtigt.

Durch Fourier-Analyse ergibt sich wie oben $\lambda^1 = 0$, falls der Plasma-
radius beim Übergang zum Torus erhalten bleibt. Die Abweichungen der
Eigenwerte sind also zumindest von der Ordnung $(r_0/a)^2$.

4. Der Plasmazylinder mit überlagertem Volumenstrom.

In diesem Abschnitt wird der Einfluß eines kleinen axialen Volumenstroms
auf die Stabilität des Plasmazylinders untersucht. Als Grundsystem wird
der Plasmazylinder mit rein azimuthalem Oberflächenstrom gewählt
(Θ -Pinch-Konfiguration). Die Rechnung wird zunächst für eine beliebige
Volumenstromverteilung durchgeführt; zur Auswertung der Integrale wird
dann auf homogene Stromverteilung (konstante Stromdichte) spezialisiert.

Die Überlagerung eines axialen Stromes bietet eine Möglichkeit, die
 Θ -Pinch-Konfiguration in einem Torus stationär zu halten. Ohne zusätz-
liche Maßnahmen würde das Plasmatoroid mit rein azimuthalem Strom ra-
dial nach außen driften (s. Fig. 1a) und nach etwa der Zeit

$$\tau = \frac{\sqrt{a r_0}}{\sqrt{v}} \quad (177)$$

Wandberührung haben. Diese Zeit ist kurz gegenüber der Zeit, die nach dem vorigen Abschnitt für das Anwachsen der Krümmungsinstabilitäten zu erwarten ist. Bei Überlagerung eines Stromes in Torus-Richtung entsteht bei Anwesenheit einer metallischen Hülle eine rücktreibende Kraft, (s. Fig. 1b) die die radiale Bewegung bremst. Die Metallhülle muß dabei so angebracht werden, daß einerseits die Induktion des toroidalen und des axialen Stromes möglich ist, und daß andererseits die durch die Plasma-bewegung induzierten Ströme in der Hülle fließen können. Die in Fig. 1c dargestellte Anordnung erfüllt beide Forderungen: Die Schlitze verhindern die Abschirmung der von außen induzierten Felder; die durch die Plasma-bewegung induzierten Ströme können sich wie skizziert schließen. Diese Konfiguration ist jedoch in dieser Form nur dann verwendbar, wenn der axiale Strom das Stabilitätsverhalten nicht drastisch beeinträchtigt.

Zur Abschätzung des Einflusses, den der axiale Strom auf die Stabilität ausübt, werden mit Hilfe des Störungsverfahrens die Eigenwerte in erster Näherung berechnet, der Abweichungsparameter ist das an der Oberfläche erzeugte azimuthale Magnetfeld b_0 . Da nach Abschnitt 3 die Krümmung erst in der zweiten Näherung erscheint, wird als Grundsystem der Plasmazylinder gewählt.

Der Gleichgewichtszustand des betrachteten Systems ist gekennzeichnet durch ein Magnetfeld der Form

$$r < r_0 : \mathcal{L} = [0, b(r), B_i]$$

$$r > r_0 : \mathcal{L} = [0, b(r), B_a]$$

B_i und B_a sind Konstanten, $b(r)$ sei für $r = r_0$ stetig mit $b(r_0) = b_0$.

Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\begin{aligned} r < r_o : & \quad p = \text{const.} \\ r = r_o : & \quad 2\mu_o p + B_i^2 = B_a^2. \end{aligned}$$

Der von b herrührende Beitrag ist als quadratisch in b_o fortgelassen.

Das Grundsystem ist gekennzeichnet durch das Magnetfeld

$$\begin{aligned} r < r_o : & \quad \mathcal{L}^o = [0, 0, B_i^o] \\ r > r_o : & \quad \mathcal{L}^o = [0, 0, B_a^o] \end{aligned} \quad (178)$$

Die Eigenfunktionen ξ_i^o , \mathcal{Q}_i^o und die Eigenwerte λ_i^o wurden früher berechnet (II, 2).

Es sei $B_i = B_i^o < B_a = B_a^o$. Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$2\mu_o p^o + B_i^{o2} = B_a^{o2} \quad (179)$$

folgt dann

$$p = p^o \quad (180)$$

Die Abweichung vom Grundsystem besteht dann nur in dem azimuthalen \mathcal{B} - Feld

$$\mathcal{B}^1 = [0, b, 0] \quad (181)$$

die zugehörige Stromdichte ist

$$\mathcal{J}^1 = [0, 0, \frac{1}{\mu_o r} \frac{d}{dr} (rb)] \quad (182)$$

Die Eigenwerte ergeben sich aus der allgemeinen Formel (64) mit Ω^1 gemäß (76). Die Größen F^1 , \mathcal{J}^1 , ϕ , $\vec{\Psi}$, \vec{P} sind zunächst zu berechnen. Für die Abweichung der Kraft F ergibt sich aus (27)

$$\begin{aligned} F^1(\xi^o) = & \mathcal{J}^1 \times \mathcal{Q}^o(\xi^o) - \frac{1}{\mu_o} \mathcal{L}^o \times [\nabla \times \mathcal{Q}^1(\xi^o)] \\ & - \frac{1}{\mu_o} \mathcal{L}^1 \times [\nabla \times \mathcal{Q}^o(\xi^o)] \end{aligned} \quad (183)$$

Hier ist

$$\begin{aligned}
 q^0(\xi^0) &= \nabla \times (\xi^0 \times \mathcal{L}^0) \\
 &= C e^{im\theta + ikz} \left[\alpha A B_i I_m'(x), \right. \\
 &\quad \left. \frac{i}{r} m A B_i I_m(x), - \frac{\alpha^2 A B_i}{ik} I_m(x) \right]
 \end{aligned}
 \tag{184}$$

und

$$\begin{aligned}
 q^1(\xi^0) &= \nabla \times (\xi^0 \times \mathcal{L}^1) \\
 &= \left[\frac{im}{r} b U, -ik b W - \frac{\partial}{\partial r} (U b), \frac{im}{r} b U \right] \\
 &= C e^{im\theta + ikz} \left[\frac{m}{kr} b \alpha A I_m'(x), \right. \\
 &\quad \left. ik b I_m(x) \left[\frac{A}{k^2 r^2} (m^2 + \alpha^2 r^2) - 1 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i \alpha r}{k} A I_m'(x) \frac{d}{dr} \left(\frac{b}{r} \right), \right. \\
 &\quad \left. \frac{im}{r} b I_m(x) \right]
 \end{aligned}
 \tag{185}$$

Im folgenden wird $q^0(\xi^0)$ und $q^1(\xi^0)$ abgekürzt durch

$$q^0(\xi^0) = [Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0] \tag{186}$$

$$q^1(\xi^0) = [Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1] \tag{187}$$

Mit diesen Ausdrücken ergibt sich aus (183) für $\xi^{0*} \cdot F^1(\xi^0)$:

$$\xi^{0*} \cdot F^1(\xi^0) =$$

$$\begin{aligned} |C|^2 \frac{mA}{\mu_0 r} B_i \left\{ I_m(x) I_m^*(x) k b \left[2 + \frac{m^2}{k^2 r^2} (1-A) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha^2}{k^2} (1+A) \right] + x I_m'(x) I_m^*(x) \left[\frac{2Ab}{k r^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2A}{kr} \frac{db}{dr} + \frac{1}{k} (1-A) \frac{d}{dr} \left(\frac{b}{r} \right) \right] \right. \\ \left. + \left| x I_m'(x) \right|^2 (1-A) \frac{b}{k r^2} \right\} \quad (188) \end{aligned}$$

$|C|^2$ berechnet sich nach (48).

Wegen $\varphi = \varphi^0$ ist $\varphi^1 = 0$; aus der Randbedingung (33) ergibt sich mit (75), daß \vec{P} ebenfalls verschwindet. Die Größen ϕ und $\vec{\psi}$ ergeben sich wie folgt.

Aus (73) ergibt sich

$$\begin{aligned} \phi = -\frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}^1 \cdot q^0(\xi^0) - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}^0 \cdot q^1(\xi^0) - \xi^0 \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)^1 \\ + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{L}^1 \cdot \nabla \times Q^0 + \frac{1}{\mu_0} \xi^0 \cdot \nabla \left(\frac{\hat{B}^2}{2} \right)^1 \quad (189) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Größen erhält man

$$\begin{aligned} \phi = \left[-\frac{1}{\mu_0} b_0 Q_2^0 - \frac{1}{\mu_0} B_i Q_3^1 - C \frac{im b_0 B_a}{\mu_0 x_0} \left(k^2 + \frac{\lambda^0}{v^2} \right) r_0 h I_m'(x_0) \right] f \\ f = e^{im\theta + ikz} \quad (190) \end{aligned}$$

hier ist

$$h = \frac{I_m(\gamma_0) K_m'(\Lambda \gamma_0) - I_m'(\Lambda \gamma_0) K_m(\gamma_0)}{\gamma_0 [K_m'(\gamma_0) I_m'(\Lambda \gamma_0) - I_m'(\gamma_0) K_m'(\Lambda \gamma_0)]} \quad (191)$$

Aus (74) ergibt sich $\vec{\Psi}$ als

$$\vec{\Psi} = [0, ub_0, 0] \quad (192)$$

Damit erhält man den in (76) benötigten Integranden

$$\begin{aligned} & \mu_0 \cdot \epsilon_0^* \phi + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \alpha_0^*) \cdot \vec{\Psi} \\ &= |C|^2 \frac{A m b_0 B_i}{\mu_0 k r_0^2} \left[x_0 I_m'(x_0) I_m^*(x_0) (A+1) \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{B a}{B_i} \left(k^2 r_0^2 + \frac{\lambda^0 r_0^2}{v^2} \right) \frac{h}{x_0^2} |x_0 I_m'(x_0)|^2 \right] \end{aligned} \quad (193)$$

Für die Eigenwertabweichung ergibt sich dann nach (64)

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \frac{m k^2 B_i}{\mu_0 g A g} \int_0^{r_0} dr \left\{ I_m(x) I_m^*(x) k b \left[2 + \frac{m^2}{k^2 r^2} (1-A) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\alpha^2}{k^2} (1+A) \right] + x I_m'(x) I_m^*(x) \left[\frac{2A}{k r^2} \frac{d}{dr} (r b) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{k} (1-A) \frac{d}{dr} \left(-\frac{b}{r} \right) \right] + |x I_m'(x)|^2 (1-A) \frac{b}{k r^2} \right\} \\ & \quad - \frac{m k B_i b_0}{\mu_0 g A r_0 g} \left[x_0 I_m'(x_0) I_m^*(x_0) (A+1) \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{B a}{B_i} \left(k^2 r_0^2 + \frac{\lambda^0 r_0^2}{v^2} \right) \frac{h}{x_0^2} |x_0 I_m'(x_0)|^2 \right] \end{aligned} \quad (194)$$

Dieser Ausdruck beschreibt jedoch nach (III, 2) nur dann die Eigenwertabweichung, wenn keine Entartung vorliegt, oder wenn im Fall der Entartung die L - Matrix diagonal ist. Für das vorliegende Grundsystem lautet die Dispersionsbeziehung

$$x_0 \left[B_i^2 + \frac{\lambda \mu_0 \rho}{k^2 + \frac{\lambda^2}{v^2}} \right] \cdot \frac{I_m(x_0)}{I_m'(x_0)} = - B_a^2 k^2 r_0^2 h \quad (195)$$

Hier erscheinen m und k nur im Betrag; es ergibt sich also Entartung für die Wertepaare (m, k), (-m, k), (m, -k), (-m, -k). Diese Entartung drückt die unmittelbar anschauliche Tatsache aus, daß wegen der Symmetrieeigenschaften des Grundsystems weder ein Drehsinn noch eine Laufrichtung der Spiralen konstanter Phase $m\Theta + kz = \text{const.}$ ausgezeichnet ist.

Das Matrixelement $L(\xi_{m,k}, \xi_{m',k'})$ hat im vorliegenden Fall die Form

$$L(\xi_{m,k}, \xi_{m',k'}) \sim \iint_{00}^{L, 2\pi} e^{i(m-m')\Theta} e^{i(k-k')z} d\Theta dz \quad (196)$$

denn die Koordinaten Θ und z erscheinen nur in den Exponentialfaktoren. Es ergibt sich also

$$L(\xi_{m,k}, \xi_{m',k'}) \sim \delta_{mm'} \delta_{kk'} \quad (197)$$

Die Eigenfunktionen $\xi_{m,k,s}$ sind also bereits die für die hier betrachtete Abweichung zu wählenden Linearkombinationen, und die λ^1 werden durch (194) richtig dargestellt.

Im Fall $B_i = 0$ ist eine Probe möglich, da das Ergebnis auch auf anderem Wege gewonnen werden kann. Mit B_i verschwinden in der Differentialgleichung (27) alle in b linearen Terme; der Volumenstrom geht dann im Rahmen dieser Näherung nur über das außerhalb der Entladung erzeugte Magnetfeld ein. Daher muß die Annahme, daß der axiale Strom ausschließlich in der Oberfläche fließt, zum gleichen Ergebnis führen. Für reinen

Oberflächenstrom gilt die Dispersionsbeziehung (58), die zum Vergleich mit (194) in b_0 zu linearisieren ist. Es ergibt sich

$$\lambda^1 = - \frac{2 m k r_0 b_0 B a h |\alpha I_m'(x_0)|^2}{\mu_0 \rho g} \quad (198)$$

Den gleichen Ausdruck liefert (194) für $B_i = 0$ unter Berücksichtigung von (49).

Zur Auswertung des Integrals in (194) wird jetzt homogene Stromdichte, also

$$b = b_0 \frac{r}{r_0}, \quad r < r_0 \quad (199)$$

angenommen. Für diesen Verlauf von b läßt sich (194) geschlossen integrieren:

$$\begin{aligned} & \int_0^{r_0} dr \left\{ I_m(x) I_m^*(x) k b \left[2 + \frac{m^2}{k^2 r^2} (1-A) - \frac{\alpha^2}{k^2} (1+A) \right] \right. \\ & \quad + x I_m'(x) I_m^*(x) \left[\frac{2A}{k r^2} \frac{d}{dr} (r b) + \frac{1}{k} (1-A) \frac{d}{dr} \left(\frac{b}{r} \right) \right] \\ & \quad \left. + \left| x I_m'(x) \right|^2 (1-A) \frac{b}{k r^2} \right\} \\ & = \frac{b_0}{k r_0} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2} \right) |x_0 I_m'(x_0)|^2 + (1-A) x_0 I_m'(x_0) I_m(x_0) \right. \\ & \quad \left. + \left[2A - \left(1 - \frac{k^2}{\alpha^2} \right) (m^2 + x_0^2) \right] |I_m(x_0)|^2 - 2A |I_m(0)|^2 \right\} \quad (200) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für λ^1

$$\lambda^1 = \frac{m k B_i b_0 s}{\mu_0 \rho r_0 A g} \quad (201)$$

mit

$$\begin{aligned}
 S = & \left[1 - \frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{2 B_a r_o^2 (k^2 + \frac{\lambda^0}{v^2}) h}{B_i x_o^2} \right] |x_o I_m'(x_o)|^2 \\
 & + \left[2 A - (1 - \frac{k^2}{\alpha^2}) (m^2 + x_o^2) \right] |I_m(x_o)|^2 \\
 & - 2 A x_o I_m'(x_o) I_m^*(x_o)
 \end{aligned} \tag{202}$$

Dem Ausdruck (201) können folgende Eigenschaften abgelesen werden:

1. Die Entartung bezüglich des Spiraldrehsinns ist aufgehoben:

$$\lambda_{mk}^1 = \lambda_{(-m)(-k)}^1 \neq \lambda_{(-m)k}^1 = \lambda_{m(-k)}^1$$

Die Feldlinienspirale, die durch B_i und b_o definiert ist, läßt jetzt eine Orientierung der Störungsspiralen zu.

2. Das Vorzeichen von B_a/B_i geht ein, d.h. die Stabilität wird durch Umkehrung des inneren oder des äußeren Feldes beeinflusst.

3. λ^1 verschwindet für $m = 0$.

Der Ausdruck (201) interessiert quantitativ vor allem für kleine k ; denn in diesem Bereich ist das Grundsystem am wenigsten stabil. Aus der Dispersionsbeziehung (58) folgt, daß λ^0 überall negativ ist; für kleine $|k|$ wird $|\lambda^0|$ beliebig klein:

$$\lambda^0 \approx -k^2 c^2 \left(1 + |m| \frac{B_a^2}{B_i^2} h \right) \tag{203}$$

Für kleine $|k|$ muß daher mit Instabilitäten, d.h. mit

$$\lambda \approx \lambda^0 + \lambda^1 > 0 \tag{204}$$

gerechnet werden.

Für das weitere interessiert vor allem der Grenzfall $\lambda = 0$. Dabei entsteht die Frage, ob hier die höheren Ordnungen λ^2 , λ^3 usw. noch sinnvoll vernachlässigt werden können. Nach Abschnitt III, 3 sind für die Kon-

vergenz des Verfahrens nicht die λ_n selbst, sondern die Differenzen $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ maßgebend. Es wird daher für die Anwendbarkeit der ersten Näherung $|\lambda_n' / (\lambda_{n+1} - \lambda_n)| \ll 1$ zu fordern sein. Danach ist ein Fehler von der Ordnung $[\lambda_n' / (\lambda_{n+1} - \lambda_n)]^2$ zu erwarten, der sich im vorliegenden Fall zu etwa 10 % berechnet. Dieser Fehler erscheint im Rahmen des magnetohydrodynamischen Modells als nicht zu hoch.

Unter Berücksichtigung der Potenzreihenentwicklung, bzw. asymptotischen Darstellung für I_m und K_m ergibt sich aus (201) für kleine $|k| r_0$

$$\lambda' = - \frac{2mkBab_0}{\mu_0 \rho r_0} \left[F + \beta \left(1 - \frac{1}{|m|} \right) \right] \quad (205)$$

Hier ist

$$\beta = \frac{B_i}{B_a}, \quad F = F(m) = \frac{\Lambda^{2|m|+1}}{\Lambda^{2|m|-1}} \quad (206)$$

Man erkennt, daß diejenige Störung, die den gleichen Drehsinn besitzt wie das äußere Feld, instabiler ist als die Störung mit umgekehrtem Drehsinn. Dies ist in Übereinstimmung mit Ergebnissen, die sich auf Konfigurationen mit reinen Oberflächenströmen beziehen^{5, 12}. Da beliebige Anfangsstörungen zugelassen sind, muß mit dem ungünstigeren Vorzeichen, also mit

$$\lambda' = \frac{2|m||k||Bab_0|}{\mu_0 \rho r_0} \left[F + \beta \left(1 - \frac{1}{|m|} \right) \right] \quad (207)$$

gerechnet werden. Für negatives β ergibt sich ein kleinerer (günstigerer) Wert. Antiparallele Felder sind also günstiger als parallele Felder. Dies stimmt überein mit einem Ergebnis von Rosenbluth¹¹, das den Einfluß einer dünnen, jedoch endlichen Übergangsschicht betrifft. Der stabilisierende Einfluß antiparalleler Felder ergibt sich ebenfalls bei Suydam¹⁰.

Der Einfluß der metallischen Hülle ist gering. Schon für $\Lambda > 3$ nimmt F für alle $m > 1$ praktisch den Wert 1, also den Grenzwert für $\Lambda \rightarrow \infty$ an.

Im Falle der Stabilität muß $\lambda > 0$ sein.

Mit (203) und (207) ergibt sich dann

$$-k^2 c^2 \left(1 + |m| \frac{B_a^2}{B_i^2} h\right) + \frac{2 |m k B_a b_o|}{\mu_o \varrho r_o} \left[F + \beta \left(1 - \frac{1}{|m|}\right)\right] < 0 \quad (208)$$

oder

$$\frac{|b_o|}{|B_a|} < \frac{|k| r_o (F + \beta^2)}{2 |m| \left[F + \beta \left(1 - \frac{1}{|m|}\right)\right]} \quad (209)$$

Diese Beziehung ist bei $b_o \neq 0$ nicht für alle k und m erfüllbar. Es gibt daher immer instabile Störungen. Für vorgegebenen azimuthalen Index m ergibt sich die maximale Anwachsrate ω bei der Wellenzahl

$$|k| = \frac{|m|}{r_o} \left| \frac{b_o}{B_a} \right| \frac{F + \beta \left(1 - \frac{1}{|m|}\right)}{F + \beta^2} \quad (210)$$

aus der Beziehung

$$\omega^2 = \lambda_{\max} = \frac{m^2 b_o^2 \left[F + \beta \left(1 - \frac{1}{|m|}\right)\right]^2}{\mu_o \varrho (F + \beta^2) r_o^2} \quad (211) \quad *)$$

Es gibt Fälle, in denen bestimmte Bereiche der m - und k -Werte auszuschließen sind. Besitzt das System endliche Länge, so treten bei geeignetem Abschluß nur Wellenzahlen auf, die der Bedingung

$$|k| = \nu \frac{2\pi}{L}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (212)$$

genügen; dies gilt z.B. für eine Ringanordnung, in der die Enden zu identifizieren sind. Der Fall $\nu = 0$ liefert $k = 0$ und damit nach (205) $\lambda^1 = 0$;

*) Daß λ_{\max} in b_o quadratisch erscheint, bedeutet keine Inkonsistenz im Rahmen der in b_o linear durchgeführten Rechnung; es läßt sich leicht zeigen, daß bei konsequenter Berücksichtigung quadratischer Glieder in (211) keine weiteren quadratischen Terme erscheinen würden.

da auch λ^0 mit k verschwindet, ergibt $\nu = 0$ indifferentes Gleichgewicht. Für $\nu \neq 0$ ergibt sich die kleinstmögliche Wellenzahl zu

$$|k|_{\min} = \frac{2\pi}{L} \quad (213)$$

Folgt man einer Überlegung von Rosenbluth, Post u.a.,²⁴ so gibt es ebenfalls eine Beschränkung für die zulässigen m -Werte. Hier nimmt man an, daß infolge endlicher Gyrationen nur solche m -Modes auftreten können, deren größte "Wellenlänge" $\frac{2\pi r_0}{m}$ höchstens gleich dem Ionen-gyrationradius a , also

$$m \leq \frac{2\pi r_0}{a} \quad (214)$$

ist; der größte m -Wert m_0 ergibt sich dann als die zu $2\pi r_0/a$ nächst kleinere ganze Zahl.

Für typische Parameterbereiche nimmt λ' nach (207) mit $|k|$ monoton zu und mit $|m|$ monoton ab. Durch Einführen des Minimal- bzw. Maximalwertes für $|k|$ und $|m|$ ergibt sich damit das Stabilitätskriterium

$$\left| \frac{b_0}{B_a} \right| < \frac{\pi r_0}{m_0 L} \cdot \frac{F_0 + \beta^2}{F_0 + \beta \left(1 - \frac{1}{m_0}\right)} \quad (215)$$

F_0 steht hier für $F(m_0)$.

Auch unter diesen Voraussetzungen sind antiparallele Felder ($\beta < 0$) günstiger als parallele Felder ($\beta > 0$). Die Funktion

$$\phi(m_0, \wedge, \beta) = \frac{F_0 + \beta^2}{F_0 + \beta \left(1 - \frac{1}{m_0}\right)} \quad (216)$$

ist für $\wedge = 3$, in Fig. 2 für einige m_0 -Werte aufgetragen. Man erkennt deutlich den Einfluß der Feldrichtung.

Wie von mehreren Autoren^{10, 11, 23} gezeigt wurde, treten bei zylindrischen Systemen mit Volumenströmen in den Differentialgleichungen für die Störgrößen Singularitäten auf, wenn für B_Θ und $B_z \neq 0$ irgendwo die Be-

bedingung $mB_{\Theta} + k r B_z = 0$ erfüllt ist. Danach können für den hier betrachteten Fall diese Singularitäten ausgeschlossen werden, wenn die Ungleichung

$$\left| \frac{b_0}{B_a} \right| < \frac{2\pi r_0 |\beta|}{m_0 L} \quad (217)$$

gilt. Im Fall

$$|\beta| > \frac{1}{2} \phi(m_0, \Lambda, \beta)$$

ist das Kriterium (215) einschränkender als die Bedingung (217), d.h. für stabile Systeme gibt es keine Singularitäten. Ferner ergibt sich durch Spezialisierung der von Suydam¹⁰ und Rosenbluth¹¹ hergeleiteten Stabilitätskriterien, daß im Grenzfall kleiner B_{Θ} in den dort betrachteten Systemen durch die Singularitäten keine zusätzlichen Instabilitäten entstehen.

Das Kriterium (215) läßt sich durch Einführung des Volumenstromes $I = \frac{2\pi r_0 b_0}{\mu_0}$ in der Form des Kruskal-Limit²⁵ schreiben:

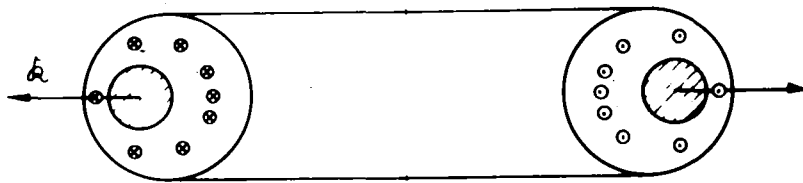
$$I < \frac{2\pi^2 r_0^2 B_a (1 + \beta^2)}{\mu_0 m_0 L \left[1 + \beta \left(1 - \frac{1}{m_0} \right) \right]} \quad (218)$$

Für $\beta = 0$ ergibt sich

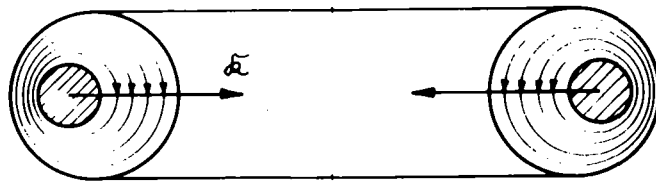
$$I < \frac{2\pi^2 r_0^2 B_a}{\mu_0 m_0 L}$$

Dieses Kriterium stimmt mit einem früher angegebenen Kriterium für reinen Oberflächenstrom und $m_0 = 1$ überein¹².

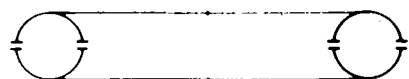
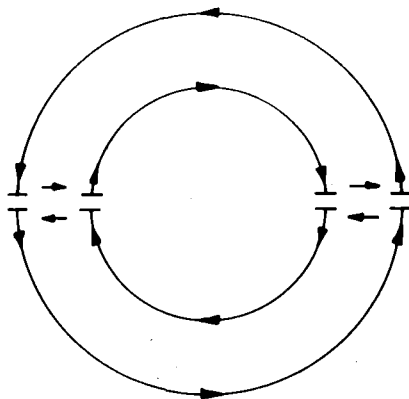
Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß die hier betrachtete Konfiguration für genügend kleine Volumenströme stabil ist; dabei sind die stabilisierenden Einflüsse von endlicher Länge und endlichen Gyrationen wesentlich. Falls alle Wellenzahlen k zuzulassen sind, ergibt sich die maximale Anwachsrate nach Gleichung (211) mit $m = m_0$.



1a



1b



1c

Bild 1

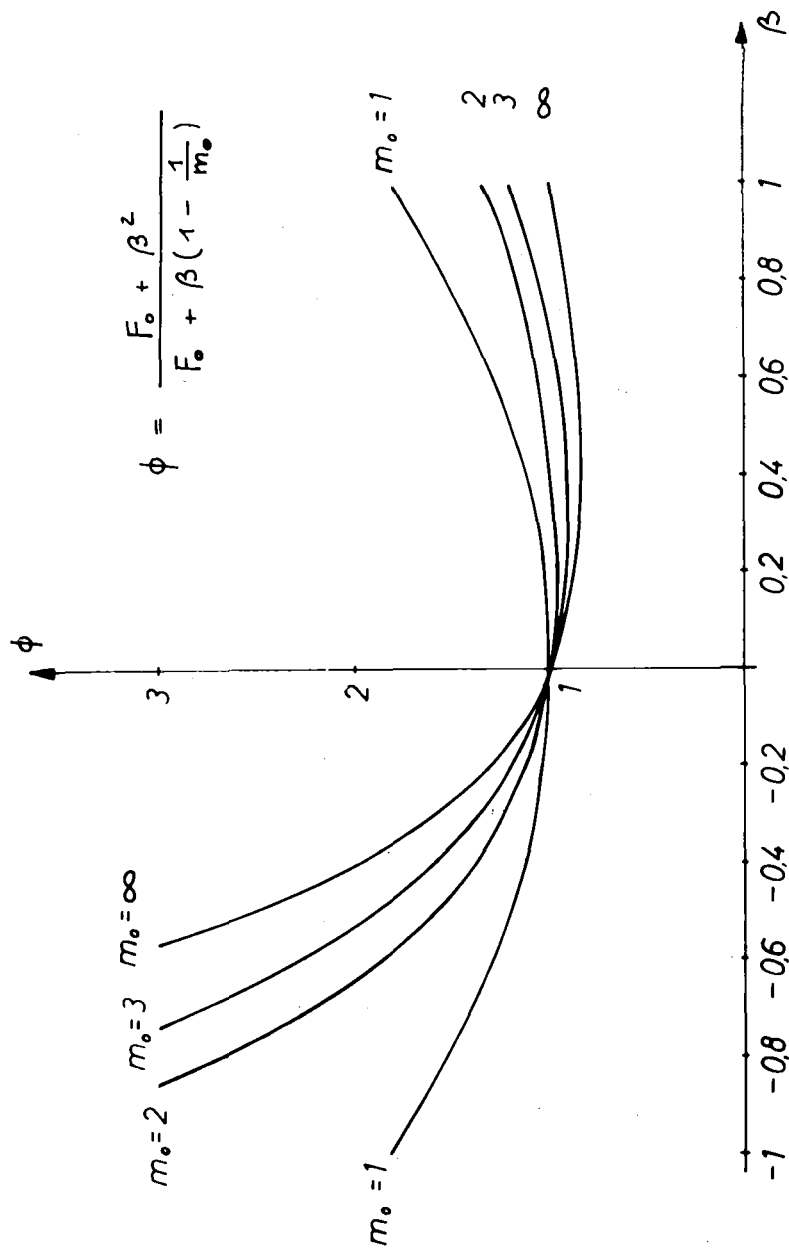


Bild 2

ANHANG

1. Berechnung von Ω_B^1 .

Unter Berücksichtigung von (73) und (74) kann Ω_B^1 aus (70) wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
 \Omega_B^1 &= \int d\sigma \, u \cdot \left\{ \xi^{0*} \left[-\frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot \nabla \times a^1 - \frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot (\xi^1 \cdot \nabla \hat{L}) - \phi \right] \right. \\
 &\quad \left. - \xi^1 \left[-\frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot \nabla \times a^{0*} - \frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot (\xi^{0*} \cdot \nabla \hat{L}) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \xi^{0*} \xi^1 \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \xi^1 \xi^{0*} \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right\} \\
 &= \int d\sigma \, \hat{u} \cdot \left\{ \xi^{0*} \left[\frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot \nabla \times a^1 + \frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot (\xi^1 \cdot \nabla \hat{L}) + \phi \right] \right. \\
 &\quad \left. - \xi^1 \left[\frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot \nabla \times a^{0*} + \frac{1}{\mu_0} \hat{L} \cdot (\xi^{0*} \cdot \nabla \hat{L}) \right] \right\} \\
 &\quad + \int d\sigma \, u \cdot \left\{ \xi^{0*} \xi^1 \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \xi^1 \xi^{0*} \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \right\} \\
 &= \int d\sigma \left\{ \frac{1}{\mu_0} \hat{u} \times a^1 \cdot \nabla \times a^{0*} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\psi} \cdot \nabla \times a^{0*} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\mu_0} \hat{u} \times a^{0*} \cdot \nabla \times a^1 \right\} \\
 &\quad + \int d\sigma \, u \cdot \left\{ \xi^{0*} \xi^1 \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \xi^1 \xi^{0*} \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) - \xi^{0*} \phi \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_B^1 = & \int_{VP} d\sigma \hat{n} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} a^1 \times (\nabla \times a^{0*}) - \frac{1}{\mu_0} a^{0*} \times (\nabla \times a^1) \right\} \\
 & + \int_{VM} d\sigma \hat{n} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} a^1 \times (\nabla \times a^{0*}) - \frac{1}{\mu_0} a^{0*} \times (\nabla \times a^1) \right\} \\
 & - \int_{VM} d\sigma \hat{n} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} a^1 \times (\nabla \times a^{0*}) - \frac{1}{\mu_0} a^{0*} \times (\nabla \times a^1) \right\} \\
 & - \int_{VP} d\sigma \frac{1}{\mu_0} \vec{\Psi} \cdot \nabla \times a^{0*} \\
 & + \int_{VP} d\sigma n \cdot \left\{ \xi^{0*} \xi \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \xi^1 \xi^{0*} \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) - \xi^{0*} \phi \right\} \quad (A1)
 \end{aligned}$$

VP bedeutet Vakuum-Plasma-Grenze, VM Vakuum-Metall-Grenze.

Die beiden ersten Integrale ergeben mit dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu_0} \int_V d\tau \left\{ \nabla \times a^{0*} \cdot \nabla \times a^1 - a^1 \cdot \nabla \times (\nabla \times a^{0*}) \right. \\
 \left. - \nabla \times a^1 \cdot \nabla \times a^{0*} + a^{0*} \cdot \nabla \times (\nabla \times a^1) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Das dritte Integral liefert mit (75)

$$\begin{aligned}
 - \int_{VM} d\sigma \left\{ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times a^{0*} \cdot (\hat{n} \times a^1) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times a^1 \cdot (\hat{n} \times a^{0*}) \right\} \\
 = - \int_{VM} d\sigma \frac{1}{\mu_0} \vec{P} \cdot \nabla \times a^{0*}
 \end{aligned}$$

Mit der Identität

$$(\mu \times \xi) \cdot (\mu \times \nabla F) = \xi \cdot \nabla F - \mu \cdot \xi \mu \cdot \nabla F$$

wird unter Berücksichtigung von

$$\mu \times \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) = 0$$

aus dem letzten Integral

$$\begin{aligned} & \int_{VP} d\sigma \mu \cdot \left\{ \xi_0^* \xi^1 \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) \right. \\ & \quad \left. - \xi^1 \xi_0^* \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \right) - \xi_0^* \phi \right\} \\ & = - \int_{VP} d\sigma \mu \cdot \xi_0^* \phi \end{aligned}$$

Damit folgt für Ω_B^1

$$\begin{aligned} \Omega_B^1 &= - \int_{VP} d\sigma \left\{ \mu \cdot \xi_0^* \phi + \frac{1}{\mu_0} \vec{\Psi} \cdot (\nabla \times \mathcal{Q}_0)^* \right\} \\ & \quad - \frac{1}{\mu_0} \int_{VN} d\sigma \vec{P} \cdot (\nabla \times \mathcal{Q}_0)^* \end{aligned} \quad (A2)$$

Durch Koordinatentransformationen (s. Abschnitt IV, 3) kann auch in (35) eine Inhomogenität auftreten:

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{Q}^1 = \vec{\chi}$$

In diesem Fall verschwinden die beiden ersten Integrale in (A1) nicht, und es ergibt sich in (A2) der zusätzliche Summand

$$- \frac{1}{\mu_0} \int_V d\tau \mathcal{Q}^{0*} \cdot \vec{\chi}$$

die Integration erstreckt sich über den Vakuum-Bereich.

2. Zum Dirac-Kalkül.

Hier sind einige Definitionen und Relationen des Diracschen Bracket-Kalküls zusammengestellt, die in Abschnitt III, 3 benötigt werden.

Zwischen einem Bra - Vektor $\langle A|$ und einem Ket - Vektor $|B\rangle$ ist ein Skalarprodukt $\langle A|B\rangle$ erklärt. $\langle A|B\rangle$ ist eine komplexe Zahl, und es gilt

$$\langle A|B\rangle = \langle B|A\rangle^*, \quad \langle A|A\rangle > 0$$

Auf die Bra- und Ket - Vektoren können lineare Operatoren wirken

$$\alpha|A\rangle = |A'\rangle, \quad \langle B|\beta = \langle B'|$$

Der zu α adjungierte Operator $\bar{\alpha}$ transformiert $\langle A|$ in $\langle B|$, wenn α die Transformation $\alpha|A\rangle = |B\rangle$ bewirkt. Es gilt $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$ und $\langle A|\bar{\alpha}|B\rangle = \langle B|\alpha|A\rangle^*$. Vektoren und Operatoren können mit Hilfe eines vollständigen Orthogonalsystems $|C_i\rangle$ mit

$$\langle C_i|C_k\rangle = \delta_{ik}$$

wie folgt dargestellt werden:

$$\langle A| = \sum_i \langle A|C_i\rangle \langle C_i|, \quad |B\rangle = \sum_i |C_i\rangle \langle C_i|B\rangle$$

$$\alpha = \sum_{i,k} |C_i\rangle \langle C_i|\alpha|C_k\rangle \langle C_k|$$

Für den Fall, daß die Orthogonalitätsrelation

$$\langle C_i|\beta|C_k\rangle = \delta_{ik}$$

lautet, wo ρ ein selbstadjungierter Operator ist, ergibt sich entsprechend

$$\langle A | = \sum_i \langle A | \rho | C_i \rangle \langle C_i |$$

$$= \sum_i \langle A | C_i \rangle \langle C_i | \rho$$

$$| B \rangle = \sum_i \rho | C_i \rangle \langle C_i | B \rangle$$

$$= \sum_i | C_i \rangle \langle C_i | \rho | B \rangle$$

$$\alpha = \sum_{i,k} | C_i \rangle \langle C_i | \rho \alpha \rho | C_k \rangle \langle C_k |$$

Der Einheitsoperator kann geschrieben werden als

$$e = \sum_i \rho | C_i \rangle \langle C_i | = \sum_i | C_i \rangle \langle C_i | \rho$$

$$= \sum_{i,k} | C_i \rangle \langle C_i | \rho^2 | C_k \rangle \langle C_k |$$

Für die Begründungen und Einzelheiten muß auf ausführlichere Darstellungen verwiesen werden^{15, 42}.

SYMBOLTABELLE

Hier sind die wichtigsten der benutzten Symbole aufgeführt: Bei abweichendem Gebrauch einzelner Symbole ist deren Bedeutung im Text jeweils ausdrücklich festgelegt.

A	Abkürzung nach (50)
a	großer Torus-Radius
\mathcal{O}	Vektorpotential im Vakuum (Störung)
α	Abweichungsparameter, Abkürzung nach (49)
\mathcal{L}	magnetische Induktion
b	durch Volumenstrom erzeugte azimuthale \mathcal{L} -Komponente
b_o	$b(r_o)$
β	Abkürzung nach (206)
C	Alfvén-Geschwindigkeit
$d\sigma$	Flächenelement
$d\tau$	Volumenelement
\mathcal{E}	elektrische Feldstärke
η	Verschiebungsvektor auf Grenzflächen
F	Kraftoperator, Abkürzung nach (206)
$G(\vec{r} \vec{r}')$	Greenscher Operator
γ	Verhältnis der spezifischen Wärmen
$I_m(x)$	modifizierte Besselfunktion: $I_m(x) = e^{-\frac{im\pi}{2}} J_m(ix)$
j	elektrische Stromdichte
$K_m(x)$	modifizierte Hankelfunktion: $K_m(x) = \frac{i\pi}{2} e^{\frac{im\pi}{2}} H_m^{(1)}(ix)$
k	Wellenzahl

\vec{J}	elektrische Flächenstromdichte
L	Zylinderlänge
\wedge	r_1/r_0 (r_1 = Radius zylindrischer Metallhülle)
λ	Eigenwert
m	azimutaler Index
μ_0	Vakuumpermeabilität
\vec{n}	Grenzflächeneinheitsnormale
Ω	Abkürzung nach (66)
ω	Eigenfrequenz
p	Druck
q	beliebige skalare oder vektorielle Größe
q_f	Abkürzung nach (22)
r_0	Radius eines Plasmazylinders
r, \tilde{r}	Ortskoordinaten
\mathcal{R}	Randbedingungsoperator
Re	Realteil
ρ	Dichte
t	Zeitkoordinate
τ	charakteristische Zeit
v	Schallgeschwindigkeit
\mathcal{D}	Verschiebungsoperator
v	Geschwindigkeit
x, x_0	$\alpha r, \alpha r_0$
ξ	Verschiebungsvektor des Plasmavolumenelementes

$$\gamma, \gamma_0 \quad |k| r, |k| r_0$$

u, v Flächenparameter

r, Θ, z Zylinderkoordinaten

U, V, W Komponenten von ξ

$\pi, \phi, \vec{\psi}, \vec{p}$ Inhomogenitäten der Randbedingungen nach (71), (73-75)

Indizes:

$q_{A,B}$ Bezeichnung der Randbedingungstypen

q^a Abweichungsgröße

q^n Abweichungsgröße der Ordnung n ,

$q^{(n)}$ Größe in n -ter Näherung

q^* konjugiert komplex

q_0 stationäre Größe

\hat{q} Vakuumgröße

Die Integration $\int_{\rho} \dots d\tau$ erstreckt sich über den Plasmabereich,
 $\int_{\sigma} \dots d\sigma$ über dessen Oberfläche.

LITERATURVERZEICHNIS

1. M. N. Rosenbluth, N. Rostoker, Theoretical structure of plasma equations, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 31
2. M. D. Kruskal, C.R. Oberman, Stability of plasma in static equilibrium, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 31
3. M. D. Kruskal, M. Schwarzschild, Some instabilities of a completely ionized plasma, Proc. Roy. Soc. A 223 (1954) 348
4. M. N. Rosenbluth, The stabilized pinch, Rend. Terzo Congresso Internazionale sui Fenomeni d' Ionizzazione nei Gas, Venedig (1957)
5. R. J. Taylor, The influence of an axial magnetic field on the stability of a constricted gas discharge, Rend. Terzo Congresso Internazionale sui Fenomeni d' Ionizzazione nei Gas, Venedig (1957) 1067-78
6. V. D. Shafranov, On the stability of a cylindrical gas conductor in a magnetic field, J. Nuclear Energy 5 (1957) 86
7. I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, R. M. Kulsrud, An energy principle for hydromagnetic stability problems, NYO - 7315 (1957)
8. K. Hain, R. Lüst, A. Schlüter, Zur Stabilität eines Plasmas Z. Naturf. 12a (1957) 833
9. F. H. Clauser, Plasma Dynamics, Addison-Wesley Publishing Co. London (1960)
10. B. R. Suydam, Stability of a linear pinch, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 31
11. M. N. Rosenbluth, Stability and heating in the pinch effect, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 31
12. H. L. Jordan, K. Schindler, On the stabilization of a pinched plasma column by axial magnetic fields, Rend. Terzo Congresso Internazionale sui Fenomeni d' Ionizzazione nei Gas, Venedig (1957)
13. P. M. Morse, H. Feshbach, Methods of theoretical physics, McGraw-Hill, New York (1953) , Kap. 9
14. P. M. Morse, H. Feshbach, Methods of theoretical physics, McGraw-Hill, New York (1953) , Kap. 11
15. P. A. M. Dirac, The principles of quantum mechanics, At the Clarendon Press, Oxford (1958)
16. Léon Brillouin, Perturbation d'un problème de valeurs propres par déformation de la frontière, Comptes Rendus, 204 (1937) 1863

17. H. Feshbach, A. M. Clogston, Perturbation of boundary conditions, Phys. Rev. 59 (1941) 189
18. M. N. Cabrera, Sur la perturbation d'un problème de valeurs propres par déformation de la frontière, Comptes Rendus 207 (1938) 1175
19. G. D. Wassermann, On the theory of boundary perturbations, Phil. Mag. 37 (1946) 563
20. G. D. Wassermann, On perturbation problems associated with finite boundaries, Proc. Cambridge Phil. Soc. 44 (1947) 251
21. C. L. Longmire, M.N. Rosenbluth, Stability of plasma confined by magnetic fields, Annals of Physics 1 (1957) 120
22. H. Lamb, Hydrodynamics, Dover Publ. New York (1945)
23. W. A. Newcomb, Hydromagnetic stability of a diffuse linear pinch Annals of Physics 10 (1960) 232
24. R. F. Post, R. E. Ellis, F. C. Ford, M. N. Rosenbluth, Stable Confinement of a high-temperature plasma, Phys. Rev. Letters 4 (1960) 166
25. L. Spitzer, The stellarator concept, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 32
26. L. Spitzer, Physics of fully ionized gases, Interscience Publishers, London (1956)
27. J. G. Linhart, Plasma physics, North Holland, Amsterdam (1960)
28. J. D. Jukes, Stabilized pinch configuration, AERE - R - 3088
29. Y. A. Tserkovnikov, Stability of a plasma in a strong magnetic field, Sov. Physics (JETP) 5 (1957) 58
30. K. Hain, R. Lüst, Zur Stabilität zylindersymmetrischer Plasmakonfigurationen, Z. Naturforsch. 13a (1958) 936
31. M. Kruskal, J. L. Tuck, The instability of a pinched fluid with a longitudinal magnetic field, Proc. Roy. Soc. A 245 (1958) 222
32. S. Chandrasekhar, A. N. Kaufman, K. M. Watson, The stability of the pinch, Proc. Roy. Soc. A 245 (1958) 435 - 455
33. M. D. Kruskal, C. R. Obermann, Stability of a plasma in static equilibrium, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 31
34. R. K. Landshoff, The plasma in a magnetic field, A Symposium on Magnetohydrodynamics, Stanford University Press (1958)
35. A. Dattner, et. al. Liquid conductor model of instabilities, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 31 325
36. R. J. Taylor, The stability of a constricted gas discharge, Proc. Second Int. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Genf (1958), Vol. 31

37. R. J. Taylor, Hydromagnetic instabilities of a cylindrical gas discharge II. Influence of viscosity, AERE - T/R - 1888
38. S. J. Robert, R. J. Taylor, The influence of conducting walls on the wriggling discharge. Part II, Walls of finite conductivity AERE - T/R - 2264
39. R. Carruthers, P. A. Davenport, Observations of the instability of constricted gaseous discharges, Proc. Phys. Soc. B 70 (1957) 49
40. M. D. Kruskal, J. L. Johnson, M. B. Gottlieb, L. M. Goldman, Hydromagnetic instability in a stellarator, Physics of Fluids 1 (1958) 421
41. T. Sundström, S. Svennerstedt, An experimental study of pinch stability, Nuclear Instruments 4 (1959) 213
42. L. I. Schiff, Quantum mechanics, McGraw-Hill, New York (1955)

Der vorliegende Bericht ist ein Abdruck meiner Dissertationsschrift,
genehmigt von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der
Technischen Hochschule Aachen.

Herrn Professor Dr. W. Fucks sei herzlich gedankt für verständnis-
volles Entgegenkommen und Ermöglichung der vorliegenden Unter-
suchungen.

Meinen besonderen Dank möchte ich Herrn Dr. H.L. Jordan für die
Anregung zu dieser Arbeit und zahlreiche klärende Diskussionen aus-
sprechen.

Herrn Professor Dr. F. Schlögl danke ich für wertvolle Hinweise
und kritische Durchsicht der Arbeit.

